

# TABELE

E. ROGAI

# și FORMULE

# MATEMATICE

1	2		
		3	4
5			
	6		

**Editura tehnică**

## Alfabetele grec și gotic

Alfabetul grec (vechi) de tipar			Alfabetul gotic de tipar		
Α	α	alfa	𐌆	a	a
Β	β	beta	𐌇	b	be
Γ	γ	gamma	𐌈	c	ce
Δ	δ	delta	𐌉	d	de
Ε	ε	epsilon	𐌊	e	e
Ζ	ζ	dzeta	𐌋	i	ef
Η	η	eta	𐌌	g	ghe
Θ	θ	theta	𐌍	h	haș
Ι	ι	iota	𐌎	i	i
Κ	κ	kappa	𐌏	i	iot
Λ	λ	lanibda	𐌐	f	ka
Μ	μ	miu	𐌑	l	el
Ν	ν	niu	𐌒	m	em
Ξ	ξ	csi	𐌓	n	en
Ο	ο	omicron	𐌔	o	o
Π	π	pi	𐌕	p	pe
Ρ	ρ	ro	𐌖	q	chiu
Σ	σ, ς	sigma	𐌗	r	er
Τ	τ	tau	𐌘	f, ð	es
Υ	υ	ipsilon	𐌙	t	te
Φ	φ	fi	𐌚	u	u
Χ	χ	hi	𐌛	v	fau
Ψ	ψ	psi	𐌜	w	ve
Ω	ω	omega	𐌝	z	ics
			𐌞	y	ipsilon
			𐌟	z	țet

# 1. ARITMETICA

## 1.1. Sisteme de numerație

Sistemul de numerație în baza zece. Orice număr natural  $n \neq 0$  se poate scrie în mod unic sub forma:

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad a_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}^*,$$

sau

$$n = a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0$$

cu  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , numite *cifrele* numărului  $n$ .

Numerele 1, 2, ..., 9 se numesc *cifre semnificative*.

*Exemplu.*  $5987 = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7$ .

Sisteme de numerație în baza  $B, B \in \mathbb{N}, B \geq 2$ . Orice număr natural  $n$  se poate scrie în mod unic sub forma:

$$n = a_m B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \dots + a_1 B + a_0, \quad a_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

sau

$$n = a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0,$$

cu  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, B-1\}$ , care se numesc *cifrele* numărului  $n$ .

Numerele 1, 2, ...,  $B-1$  sînt *cifrele semnificative*.

**Sisteme de numerație utilizate.** Alături de sistemul zecimal se utilizează: *sistemul binar* ( $B=2$ , cu cifrele 0, 1), *sistemul octal* ( $B=8$ , cu cifrele 0, 1, 2, ..., 7), *sistemul hexazecimal* ( $B=16$ , cu cifrele 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F) și *sistemul sexagesimal* (cu baza  $B=60$ ).

Frecvent, baza unui sistem de numerație se asociază numărului respectiv, sub forma unui indice inferior, scris între paranteze rotunde.

$$\begin{aligned} \text{Exemplu. } 100_{(10)} &= 6 \cdot 16 + 4 = 64_{(16)}; \quad 111_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = \\ &= 7_{(10)} = 2 \cdot 3 + 1 = 21_{(3)}. \end{aligned}$$

## 1.2. Teorema împărțirii întregi

**Teorema împărțirii întregi pentru numerele naturale.** Dacă  $a \in \mathbb{N}$  și  $b \in \mathbb{N}^*$ , atunci există  $q \in \mathbb{N}$  și  $r \in \mathbb{N}$ , astfel încît  $a = bq + r$ , cu  $0 \leq r < b$ ,  $q$  și  $r$  fiind unic determinați cu această proprietate

*Exemplu.* Pentru  $a = 41$  și  $b = 13$  există  $q = 3$  și  $r = 2$ , astfel încît  $41 = 13 \cdot 3 + 2$ .

**Teorema împărțirii numerelor întregi.** Dacă  $a \in \mathbb{Z}$  și  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , atunci există  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  astfel încît  $a = bq + r$ , cu  $0 \leq r < |b|$ ,  $q$  și  $r$  fiind unic determinați cu această proprietate.

Numerele  $a, b, q$  și  $r$  se numesc respectiv: *dîmpărțit*, *împărțitor*, *cît* și *rest*.

\* Pentru notațiile folosite pentru submulțimi importante ale numerelor reale, a se vedea § 0.1.1., pagina 379

### 1.3. Divizibilitatea numerelor naturale

*Definiție.* Numărul natural  $b \neq 0$  divide numărul natural  $a$ , dacă există un număr natural  $c$ , astfel încât  $a = bc$ .

Se spune că  $a$  se divide prin  $b$  (sau  $a$  este un multiplu al lui  $b$ ), respectiv  $b$  divide pe  $a$  (sau  $b$  este un divizor al lui  $a$ ); proprietatea  $b$  divide pe  $a$  se notează  $b | a$ .

*Criteriul general de divizibilitate:* un număr natural  $b \neq 0$  divide numărul natural  $a$ , dacă și numai dacă restul împărțirii lui  $a$  la  $b$  este egal cu zero.

*Algoritmullui Euclide.* Se numește algoritmullui Euclid al numerelor naturale  $a$  și  $b$ ,  $a \geq b > 0$ , tabloul de relații

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b,$$

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1,$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2,$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \quad 0 \leq r_n < r_{n-1},$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \quad r_{n+1} = 0.$$

Numerele  $q_1, \dots, q_{n+1}$  se numesc *coteuri*, iar  $r_1, \dots, r_{n+1}$  resturi.

*Câteva proprietăți.* 1) Dacă  $a | b$  și  $b | c$ , atunci  $a | c$  (tranzitivitate).

2) Dacă  $b | a$  și  $c \neq 0$ , atunci  $bc | ac$ .

3) Dacă  $b | a$  și  $b | c$  atunci  $b | (a \pm c)$ .

*Teoremă.* Produsul a  $n$  numere naturale consecutive se divide cu  $n!$ .

*Teoremă.* Orice număr întreg  $a$  se divide cu  $-a$ ,  $-1$ ,  $1$  și  $a$ .

*Definiție.* Divizorii  $-a$ ,  $-1$ ,  $1$  și  $a$  ai unui număr întreg  $a$  se numesc *divizori improprii*. Orice alt divizor al lui  $a \in \mathbf{Z}$  se numește *divizor propriu*.

*Definiție.* Numerele întregi diferite de  $-1$  și  $1$  care au numai divizori improprii se numesc *numere indecompozabile*.

*Definiție.* Numerele întregi care au divizori proprii se numesc *numere compuse*.

### 1.4. Criterii de divizibilitate a numerelor naturale scrise în baza 10

1) Un număr natural este divizibil cu 2 (sau cu 5) dacă și numai dacă cifra unităților este divizibilă cu 2 (sau cu 5).

2) Un număr natural este divizibil cu 4 (sau cu 25), dacă și numai dacă numărul format cu cifra zecilor și a unităților, luate în această ordine, este divizibil cu 4 (sau cu 25).

*Generalizare.* Un număr natural este divizibil cu  $2^p$  (sau cu  $5^p$ ),  $p \in \mathbf{N}^*$ , dacă și numai dacă numărul format cu ultimele  $p$  cifre este divizibil cu  $2^p$  (sau cu  $5^p$ ).

3) Un număr natural este divizibil cu 3 (sau cu 9), dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3 (sau cu 9).

4) Un număr natural este divizibil cu 7 dacă și numai dacă suma produselor obținute prin înmulțirea cifrei unităților cu 1, a cifrei zecilor cu 3, a

cifrei sutelor cu 2, a cifrei miilor cu 6, a cifrei zecilor de mii cu 4, a cifrei sutelor de mii cu 5, a cifrei milioaneilor cu 1, a cifrei zecilor de milioane cu 3 etc. este divizibilă prin 7. Restul împărțirii unui număr natural prin 7 este egal cu restul împărțirii acestei luncme prin 7.

5) Un număr natural este divizibil cu 11 dacă și numai dacă diferența dintre suma cifrelor de rang impar și suma cifrelor de rang par este divizibilă cu 11.

6) Un număr natural este divizibil cu 13 dacă și numai dacă diferența dintre numărul format cu ultimele trei cifre și numărul format cu toate celelalte cifre este divizibilă cu 13.

Observație. Acest criteriu este valabil și pentru divizibilitatea cu 7 sau 11, dacă diferența respectivă este divizibilă cu 7 sau 11.

## 1.5. Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun\*

*Definiție 1.* Se numește cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al numerelor naturale  $a$  și  $b$  numărul natural  $d$  care are proprietățile: 1)  $d \mid a$  și  $d \mid b$  (adică  $d$  este un divizor comun); 2) dacă  $\delta \mid a$  și  $\delta \mid b$ , atunci  $\delta \mid d$  (adică  $d$  este cel mai mare dintre toți divizorii comuni ai lui  $a$  și  $b$ ). C.m.m.d.c. se notează cu  $(a, b)$  și se determină cu ajutorul algoritmului lui Euclid ( $d = r_n$ ).

*Definiție 2.* Numerele naturale  $a$  și  $b$  se numesc prime între ele, dacă  $(a, b) = 1$ .

*Definiție 3.* Se numește cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al numerelor naturale  $a$  și  $b$  numărul natural  $m$  care are proprietățile: 1)  $a \mid m$  și  $b \mid m$  (adică  $m$  este un multiplu comun); 2) dacă  $a \mid \mu$  și  $b \mid \mu$ ,  $\mu \in \mathbb{N}$ , atunci  $m \mid \mu$  (adică  $m$  este cel mai mic dintre toți multiplii comuni ai lui  $a$  și  $b$ ), C.m.m.m.c. se notează  $[a, b]$ .

*Proprietăți comune ale c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.*

$$(a, a) = a; [a, a] = a \text{ (idempotență)}$$

$$(a, b) = (b, a); [a, b] = [b, a] \text{ (comutativitate)}$$

$$(ac, bc) = c(a, b); [ac, bc] = c[a, b]$$

$$(a, (b, c)) = ((a, b), c); [a, [b, c]] = [[a, b], c] \text{ (asociativitate)}$$

$$(a, [a, b]) = a; [a, (a, b)] = a \text{ (absorbție)}$$

$$(a, b) \cdot [a, b] = ab.$$

*Teorema lui Gauss.* Dacă un număr întreg divide produsul a două numere întregi și este prim cu unul dintre factorii produsului, atunci acest număr divide celălalt factor al produsului.

## 1.6. Numere prime

*Definiție.* Se numește număr prim orice număr natural  $p$ ,  $p \geq 2$ , care are drept divizori pe  $\pm 1$  și  $\pm p$ .

*Exemplu.* Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13 sînt numere prime. În tabela 1.3 sînt date numerele prime de la 1 la 10 000.

\* Aceste concepte se definesc corespunzător pentru  $a, b \in \mathbb{Z}$  sau pentru un număr finit de numere întregi.

**Teorema lui Euclid.** Mulțimea numerelor prime este infinită.

**Teoremă.** Numărul natural  $p \geq 2$  este prim  $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{Z}$  astfel încât din  $p$  divide produsul  $ab$  să rezulte că  $p \mid a$  sau  $p \mid b$ .

**Teoremă.** Dacă  $2^k + 1$  este un număr natural prim mai mare decât 3, atunci  $k$  este o putere a lui 2.

**Observație.** Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. De pildă

$$2^{64} + 1 = 641 \cdot 6700417 \text{ (Euler)} \text{ și } 2^{32} + 1 = 274.177 \cdot 67280421310721 \text{ (Laxdrev)}$$

**Funcția lui Euler,  $\varphi(n)$ ,** este definită pe  $\mathbb{N}$ , cu valori în  $\mathbb{N}$ , astfel:  $\varphi(n)$  este numărul numerelor naturale mai mici decât  $n$  și prime cu  $n$ . Se mai numește **indicatorul numărului  $n$**  sau **indicatorul lui Euler**.

**Exemplu.** Pentru  $n = 30$ , numerele 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 și 29 sînt mai mici decât 30 și sînt prime cu 30. Deci  $\varphi(30) = 8$ .

**Teoremă.** Dacă numărul natural  $n$  are descompunerea  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , atunci

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

**Exemplu.** Fie  $n = 30$ . Deoarece  $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , avem  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$  și  $p_3 = 5$ . Prin urmare  $\varphi(30) = 30 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8$ .

**Teoremă.** Dacă  $a, b \in \mathbb{N}$  și  $(a, b) = 1$ , atunci  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ .

**Exemplu.** Fie  $n = 21$ ; pentru el avem  $a = 3$  și  $b = 7$ . Deci  $\varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$ .

**Proprietăți ale indicatorului lui Euler.**

1. Indicatorul unui număr natural mai mare decât 2 este un număr natural par.

2. Dacă  $n > 1$ , atunci  $\varphi(n) \leq n - 1$ .

3. Dacă  $n - 1$  se divide cu  $\varphi(n)$ , atunci  $n$  este prim.

4. Suma indicatorilor tuturor divizorilor unui număr natural este egal cu numărul natural considerat.

5. Suma numerelor naturale prime cu  $n \in \mathbb{N}$  și mai mici decât  $n$ , notată  $\rho(n)$ , este dată de formula

$$\rho(n) = \frac{1}{2} n \varphi(n).$$

**Mica teoremă a lui Fermat.** Dacă  $p$  este un număr natural prim, iar  $a$  un întreg oarecare, atunci

$$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}, \quad (1)$$

adică  $a^p - a$  se divide cu  $p$ .

Dacă  $a$  nu este divizibil cu numărul prim  $p$ , atunci relația (1) se mai scrie

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad (2)$$

adică, de această dată,  $a^{p-1} - 1$  se divide cu  $p$ .

\* Am notat proprietatea că dacă  $p$  este un număr natural prim, atunci  $\varphi(p) = p - 1$ :

*Exemplu.* Dacă  $p = 7$  și  $a = 2$ , atunci  $2^6 - 1 = 63$  este un multiplu de 7.  
*Teorema lui Euler sau teorema lui Fermat generalizată.* Fie  $n$  un număr natural dat,  $\varphi(n)$  indicatorul lui  $n$  și  $(a, n) = 1$ , cu  $a \in \mathbb{Z}$ ; atunci avem

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

adică  $a^{\varphi(n)} - 1$  se divide cu  $n$ .

*Exemplu.* Pentru  $a = 7$  și  $n = 10$ , avem  $\varphi(10) = 10 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$ , respectiv  $7^4 = 2401 = 1 + m \cdot 10$ :

*Teorema lui Wilson.* Numărul natural  $p$  este prim, dacă și numai dacă  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , adică numărul  $(p-1)! + 1$  se divide cu  $p$ .

*Exemplu.* Fie  $p = 7$  (număr prim). Atunci  $(7-1)! + 1 = 721 = 7 \cdot 103$  este un multiplu de 7.

*Șiruri de numere prime.* Din șirul de numere  $p_n = n^2 + n + 41$ , cu  $n = 0, 1, 2, \dots, 29$ , rezultă 40 de numere prime (Euler): 41, 43, ..., 1601.

De asemenea, din șirul de numere naturale  $q_n = n^2 + n + 17$ , cu  $n = 0, 1, 2, \dots, 15$  rezultă 16 numere prime 17, 19, 23, ..., 257.

## 1.7. Teoreme de teoria numerelor

*Teoremă fundamentală.* Orice număr întreg diferit de zero și de  $\pm 1$  se poate descompune într-un produs de factori primi. Această descompunere este unică, abstracție făcând de ordinea factorilor. Un asemenea număr întreg  $n$  se scrie sub forma:  $n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , cu  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  numere naturale nenule, iar  $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_k$  numere prime.

Aceasta se mai numește *teorema fundamentală a aritmeticii*.

Dacă un număr natural  $n$  are descompunerea canonică  $n = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$ , atunci divizorii săi naturali sînt termenii produsului:

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha) \cdot (1 + b + \dots + b^\beta) \cdot (1 + c + \dots + c^\gamma).$$

*Numărul divizorilor unui număr natural  $n$ .* Dacă numărul natural  $n$  are descompunerea canonică

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

atunci numărul divizorilor naturali ai lui  $n$ ,  $\sigma(n)$ , este dat de produsul

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

*Suma divizorilor unui număr natural  $n$ .* Dacă numărul natural  $n$  are descompunerea canonică

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

atunci suma tuturor divizorilor naturali ai lui  $n$ ,  $\tau(n)$ , este dată de formula

$$\tau(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

## 1.8. Ecuații remarcabile

*Ecuația pitagorică*  $x^2 + y^2 = z^2$ . Această ecuație are drept soluții mulțimea de numere naturale  $x = 2uv$ ,  $y = u^2 - v^2$ ,  $z = u^2 + v^2$ ,  $u, v \in \mathbb{N}^*$ ,  $u > v$ .

*Exemplu.* Pentru  $u = 2$  și  $v = 1$ , găsim soluția naturală  $x = 4$ ,  $y = 3$ ,  $z = 5$ . Pentru  $u = 3$  și  $v = 2$ , obținem  $x = 12$ ,  $y = 5$  și  $z = 13$ .

*Ecuația diofantică*  $ax + by = c$ . Această ecuație cu  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  are soluții întregi dacă și numai dacă c.m.m.d.c. al numerelor  $a$  și  $b$ , respectiv  $(a, b)$ , este divizor al lui  $c$ . Soluțiile întregi ale ecuației sînt  $x = x_0 + mb$ ,  $y = y_0 - ma$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , unde  $x_0, y_0$  este o soluție intrcăgă, particulară.

*Exemplu.* Ecuația  $3x - 10y = 2$  are c.m.m.d.c.  $(3, -10) = 1$ , respectiv  $x_0 = 4$ ,  $y_0 = 1$ . Deci  $x = 4 - 10m$ ,  $y = 1 - 3m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

*Ecuația lui Pell-Fermat*  $x^2 - ky^2 = 1$ . Această ecuație, unde  $k$  este un număr natural, diferit de un pătrat perfect, admite un șir de soluții, numere naturale  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definite recurent astfel:  $x_{n+1} = x_1 x_n + k y_1 y_n$ ;  $y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n$ , cu  $(x_1, y_1)$  cea mai mică soluție.

*Exemplu.* Ecuația\*)  $x^2 - 3y^2 = 1$  are  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 1$ ; deci

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad n \geq 1.$$

## 1.9. Alte rezultate din aritmetică

*Definiție.* Se numește fracție ireductibilă orice număr rațional  $\frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , cu  $(m, n) = 1$ .

*Teoremă.* O fracție ireductibilă se transformă într-o fracție zecimală periodică simplă dacă numitorul ei nu are nici factorul 2 și nici factorul 5. Ea se transformă în fracție zecimală periodică mixtă, dacă numitorul său pe lângă 2 sau 5 conține și alți factori primi. Partea neperiodică are un număr de cifre egal cu cel mai mare dintre exponenții lui 2 și 5.

*Teoremă.* Dacă  $a, a', b, b', n \in \mathbb{Z}$  și  $ab' - a'b = \pm 1$ , atunci fracția  $\frac{an + a'}{bn + b'}$  este ireductibilă.

## 1.10. Extragerea rădăcinii pătrate

Numărul dat, de exemplu 53 824, se împarte în grupe de câte două cifre, de la dreapta spre stînga, ultima grupă putînd avea și o singură cifră: 5 38 24. Se caută numărul al cărui pătrat se cuprinde în prima grupă din stînga (în exemplul dat, numărul căutat este 2); el va fi prima cifră a rădăcinii pătrate a numărului dat. Pătratul respectiv se scade din prima grupă și restului găsit, adică lui 1, i se alătură a doua grupă, respectiv 38. Cu numărul astfel obținut, adică cu 138, se procedează astfel: se separă ultima cifră din dreapta și apoi grupa din stînga, adică 13, se împarte cu dublul primei cifre a rădăcinii, în cazul nostru 4; citul 3 se scrie lângă dublul rădăcinii, 43, obținîndu-se un număr care se înmulțește cu ultima sa cifră,  $43 \times 3 = 129$ .

\*) A se vedea Gazeta Matematică nr. 5/1979, pg. 207.



Dacă acest produs se poate scădea din numărul format de primul rest și de grupa alăturată lui, 138, atunci numărul cu care s-a înmulțit, 3, este a doua cifră a rădăcinii numărului dat. Dacă nu, se schimbă cifra înmulțitoare. Toate celelalte cifre ale rădăcinii se află prin același procedeu.

Restul fiecărei scăderi trebuie să fie mai mic decât dublul numărului format de cifrele respective ale rădăcinii plus unu.

Dacă numărul dat este zecimal, despărțirea în grupe de două cifre se face pornind de la virgulă, spre stânga pentru partea întreagă și spre dreapta pentru partea zecimală (completând cu un zero ultima grupă din dreapta, în cazul când are o singură cifră).

*Exemplu.*

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{5\ 38\ 24} & 232 \\
 \hline
 4 & 2 \times 2 = 4 \quad | \quad 43 \times 3 = 129 \\
 \hline
 138 & 23 \times 2 = 46 \quad | \quad 462 \times 2 = 924 \\
 129 & \\
 \hline
 = 924 & \\
 924 & \\
 \hline
 = & \\
 \hline
 \end{array}$$

## 1.11. Extragerea rădăcinii cubice

Numărul dat, de exemplu 13 312 053, se împarte în grupe de câte trei cifre, de la dreapta spre stânga, ultima grupă din stânga putând avea două cifre sau chiar o singură cifră: 13 312 053. Se caută numărul al cărui cub se cuprinde în prima grupă din stânga (în exemplul menționat, numărul căutat este 2) și care constituie prima cifră a rădăcinii. Se scade cubul, adică 8 din prima grupă, 13, și restului 5 i se alătură prima cifră a grupei următoare, adică 3. Numărul astfel format, 53, se împarte la întreitul pătratului primei cifre a rădăcinii, adică la 12. Cîțul astfel obținut este sau a doua cifră a rădăcinii căutate sau un număr mai mare și atunci, prin încercări succesive care să permită efectuarea scăderii, se ajunge la cifra exactă (în exemplul dat, rezultatul împărțirii 53:12 este 4; acesta este prea mare și atunci se încearcă cu 3, care este cifra căutată). Numărul format de cele două cifre ale rădăcinii, 23, se ridică la cub și se scade din numărul format de primele două grupe din stânga ale numărului dat, adică, din 13 312. Lîngă restul obținut, 11 450, se coboară prima cifră a grupeii a treia, 0, și operația se continuă în mod asemănător.

Restul trebuie să fie mai mic decât întreitul sumei dintre rădăcină și pătratul rădăcinii plus unu.

*Exemplu:*

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt[3]{13\ 312\ 053} & 237 \\
 \hline
 8 & 2^2 \times 3 = 12 \\
 \hline
 53:12 = 4 & 24^3 = 13\ 824 \text{ (prea mare)} \\
 13\ 312 & 23^3 = 12\ 167 \\
 12\ 167 & \hline
 11450:1\ 587 = 7 & 23^2 \times 3 = 1\ 587 \\
 13312\ 053 & 237^3 = 13\ 312\ 053 \\
 13312\ 053 & \\
 \hline
 \end{array}$$

## 1.12. Folosirea tabelelor 1.1.—1.5.

### Tabela 1.1. Puterile numerelor 2, 3 și 5

Această tabelă conține puterile de la 1 la 40 ale numărului 2, de la 1 la 30 ale numărului 3 și de la 1 la 24 ale numărului 5. Ea se folosește astfel: se caută în coloana Ex (exponentul) și se merge, pe aceeași linie orizontală spre dreapta, în coloana P, unde se găsește puterea; de exemplu, pentru a afla puterea  $2^{12}$  se caută în coloana Ex numărul 12 și se găsește în coloana P rezultatul  $4\ 096 = 2^{12}$ .

### Tabela 1.2. Puterile 4 și 5 ale numerelor de la 1 la 100

Procedul de utilizare al tabelii este următorul. În prima coloană și în cea de a patra se găsește numărul  $n$ , iar în celelalte puterile numărului  $n$ ; de exemplu dacă  $n = 15$ , atunci  $n^4 = 50\ 625$ , iar  $n^5 = 759\ 375$ .

### Tabela 1.3. Numerele prime de la 1 la 10000

Această tabelă conține numerele prime în ordinea mărimii; pentru ușurința citirii, numărul sutelor  $n$ -a fost trecut decît o singură dată și cu cifre grase; de exemplu 307, 1 601, 6 007 etc.

### Tabela 1.4. Cei mai mici divizori ai numerelor naturale de la 169 la 10000

Această tabelă servește la descompunerea numerelor mari în factori primi; ea nu conține numerele divizibile prin 2, 3, 5, 7 și 11 din motive ușor de înțeles.

Pentru utilizarea tabelii se împarte numărul — care intersecționează — pe rînd prin 2, 3, 5, 7 și 11; cînd una din împărțiri se face exact, se caută citul în coloana N; dacă acest cit se află în coloană, atunci cel mai mic divizor al său se găsește în coloana alăturată D. Împărțim citul prin acest cel mai mic divizor al său și căutăm noul cit în tabelă. Continuăm ca mai înainte, pînă cînd obținem un cit care nu se mai găsește în tabelă și care este, în consecință, număr prim (cea ce se poate verifica ușor cu ajutorul tabelii 1.3).

*Exemplu:*  $H = 43\ 615$ ; se vede ușor că  $H$  este divizibil prin 5 și prin 11; găsim:  $43\ 615 = 5 \times 11 \times 793$ . Numărul 793 se află în coloana N; alături în coloana D, citim cel mai mic divizor al său, numărul 13. Împărțim pe 793 prin 13; avem:  $793 = 13 \times 61$ . Așadar  $43\ 615 = 5 \times 11 \times 13 \times 61$ .

### Tabela 1.5. Părți proporționale pentru interpolări liniare ale numerelor naturale de la 11 la 90

Dacă se cunosc două valori ale unei mărimi, se poate calcula cu o precizie suficientă, uneori, pentru nevoile practice, o valoare intermediară, admitîndu-se o creștere sau o descreștere proporțională cu diferența dintre cele două valori cunoscute.

*Exemplu.* Se caută valoarea  $\sqrt{901,3}$ , cunoscînd valoarea  $\sqrt{901} = 30,017$  și  $\sqrt{902} = 30,033$ . La diferența de o unitate întregă a numărului corespunde o creștere de 16 miimi a radicalului. Admițînd proporționalitatea dintre creșterea radicalului și creșterea numărului se va adăuga la cea mai mică dintre cele două valori,  $\frac{16 \times 3}{10}$  miimi, adică 4,8 respectiv 5 miimi, valoarea

aflată la intersecția liniei 3 cu coloana 16 din tabelă. Valoarea căutată este deci 30,022.

TABELA 1.1. Puterile numerelor 2, 3 și 5

## Puterile lui 2

Ex	P	Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	2	11	2 048	21	2 097 152	31	2 147 483 648
2	4	12	4 096	22	4 194 304	32	4 294 967 296
3	8	13	8 192	23	8 388 608	33	8 589 934 592
4	16	14	16 384	24	16 777 216	34	17 179 869 184
5	32	15	32 768	25	33 554 432	35	34 359 738 368
6	64	16	65 536	26	67 108 864	36	68 719 476 736
7	128	17	131 072	27	134 217 728	37	137 438 953 472
8	256	18	262 144	28	268 435 456	38	274 877 906 944
9	512	19	524 288	29	536 870 912	39	549 755 813 888
10	1 024	20	1 048 576	30	1 073 741 824	40	1 099 511 627 776

## Puterile lui 3

Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	3	11	177 147	21	10 460 353 203
2	9	12	531 441	22	31 381 059 609
3	27	13	1 594 323	23	94 143 178 827
4	81	14	4 782 969	24	282 429 536 481
5	243	15	14 348 907	25	847 288 609 443
6	729	16	43 046 721	26	2 541 865 828 329
7	2 187	17	129 140 163	27	7 625 597 484 987
8	6 561	18	887 420 489	28	22 876 792 454 961
9	19 683	19	1 162 261 467	29	68 630 377 364 883
10	59 049	20	3 486 784 401	30	205 891 132 094 649

## Puterile lui 5

Ex	P	Ex	P	Ex	P
1	5	9	1 953 125	17	762 939 453 125
2	25	10	9 765 625	18	3 814 697 265 625
3	125	11	48 828 125	19	19 073 486 328 125
4	625	12	244 140 625	20	95 367 431 640 625
5	3 125	13	1 220 703 125	21	476 837 158 203 125
6	15 625	14	6 103 515 625	22	2 384 185 791 015 625
7	78 125	15	30 517 578 125	23	11 920 928 955 078 125
8	390 625	16	152 587 890 625	24	59 604 644 775 390 625

TABELA 1.2. Puterile 4 și 5 ale numerelor de la 1 la 100

$n$	$n^4$	$n^5$	$n$	$n^4$	$n^5$
1	1	1	25	390 625	9 765 625
2	16	32	26	456 376	11 881 376
			27	531 441	14 348 907
3	81	243	28	614 656	17 210 368
4	256	1 024	29	707 231	20 511 149
5	625	3 125	30	810 000	24 300 000
6	1 296	7 776	31	923 521	28 629 151
7	2 401	16 807	32	1 048 576	33 554 432
8	4 096	32 768	33	1 185 921	39 135 393
9	6 561	59 049	34	1 336 336	45 435 424
10	10 000	100 000	35	1 500 625	52 521 875
11	14 641	161 051	36	1 679 616	60 466 176
12	20 736	248 832	37	1 874 161	69 343 957
13	28 561	371 293	38	2 085 136	79 235 168
14	38 416	537 824	39	2 313 441	90 224 199
15	50 625	759 375	40	2 560 000	102 400 000
16	65 536	1 048 576	41	2 825 761	115 856 201
17	83 521	1 419 857	42	3 111 696	130 691 232
18	104 976	1 889 568	43	3 418 801	147 008 443
19	130 321	2 476 099	44	3 748 096	164 916 224
20	160 000	3 200 000	45	4 100 625	184 528 125
21	194 481	4 084 101	46	4 477 456	205 962 976
22	234 256	5 153 632	47	4 879 681	229 345 007
23	279 841	6 436 343	48	5 308 416	254 803 968
24	331 776	7 962 624	49	5 764 801	282 475 249

Tabela 1.2 (continuare)

$n$	$n^2$	$n^3$	$n$	$n^2$	$n^3$
50	6 250 000	312 500 000	75	31 640 625	2 373 046 875
51	6 765 201	345 025 251	76	33 362 176	2 535 525 376
52	7 311 616	380 204 032	77	35 153 041	2 706 784 157
53	7 890 481	418 195 493	78	37 015 056	2 887 174 368
54	8 503 056	459 165 024	79	38 950 081	3 077 056 399
55	9 150 625	503 284 375	80	40 960 000	3 276 800 000
56	9 834 496	550 731 776	81	43 046 721	3 486 784 401
57	10 556 001	601 692 057	82	45 212 176	3 707 398 432
58	11 316 496	656 356 768	83	47 458 321	3 939 040 643
59	12 117 361	714 924 299	84	49 787 136	4 182 119 424
60	12 960 000	777 600 000	85	52 200 625	4 437 053 125
61	13 845 841	844 596 301	86	54 708 816	4 704 270 176
62	14 776 336	916 132 832	87	57 289 761	4 984 209 207
63	15 752 961	992 436 543	88	59 969 536	5 277 319 168
64	16 777 216	1 073 741 824	89	62 742 241	5 584 059 449
65	17 850 625	1 160 290 625	90	65 610 000	5 904 900 000
66	18 974 736	1 252 332 576	91	68 574 961	6 240 321 451
67	20 151 121	1 350 125 107	92	71 639 296	6 590 815 232
68	21 381 376	1 453 933 568	93	74 805 201	6 956 883 693
69	22 667 121	1 564 031 349	94	78 074 896	7 339 040 224
70	24 010 000	1 680 700 000	95	81 450 625	7 737 809 375
			96	84 934 656	8 153 726 976
71	25 411 681	1 804 229 351	97	88 529 281	8 587 340 257
72	26 873 856	1 934 917 632	98	92 236 816	9 039 207 968
73	28 398 241	2 073 071 593	99	96 059 601	9 509 900 499
74	29 986 576	2 219 006 614	100	100 000 000	10 000 000 000

Tabela 1.3. Numercle prime de la 1 la 10 000

1: 2	2 23	4 99	8 11	11 17	14 81	18 11	21 61	25 43
3	27	—	21	23	83	23	79	49
5	29	5 03	23	29	87	31	22 03	51
7	33	09	27	51	89	47	07	57
11	39	21	29	53	93	61	13	79
13	41	23	39	63	99	67	21	91
17	51	41	53	71	—	71	37	93
19	57	47	57	81	15 11	73	39	26 09
23	63	57	59	87	23	77	43	17
29	69	63	63	93	31	79	51	21
31	71	69	77	12 01	43	89	67	33
37	77	71	81	13	49	19 01	69	47
41	81	77	83	17	53	07	73	57
43	83	87	87	23	59	13	81	59
47	93	93	9 07	29	67	31	87	63
53	3 07	99	11	31	71	33	93	71
59	11	6 01	19	37	79	49	97	77
61	13	07	29	49	83	51	28 09	83
67	17	13	37	59	97	73	11	87
71	31	17	41	77	16 01	79	33	89
73	37	19	47	79	07	87	39	93
79	47	31	53	83	09	93	41	99
83	49	41	67	89	13	97	47	27 07
89	53	43	71	91	19	99	51	11
97	59	47	77	97	21	—	57	13
101	67	53	83	13 01	27	20 03	71	19
03	73	59	91	03	37	11	77	29
07	79	61	97	07	57	17	81	31
09	83	73	—	19	63	27	83	41
13	89	77	10 09	21	67	29	89	49
27	97	83	13	27	69	39	93	53
31	4 01	91	19	61	93	53	99	67
37	09	7 01	21	67	97	63	24 11	77
39	19	09	31	73	99	69	17	89
49	21	19	33	81	17 09	81	23	91
51	31	27	39	99	21	83	37	97
57	33	33	49	14 09	23	87	41	28 01
63	39	39	51	23	33	89	47	03
67	43	43	61	27	41	99	59	19
73	49	51	63	29	47	21 11	67	33
79	57	57	69	33	53	13	73	37
81	61	61	87	39	59	29	77	43
91	63	69	91	47	77	31	—	51
93	67	73	93	51	83	37	25 03	57
97	79	87	97	53	87	41	21	61
99	87	97	11 03	59	89	43	31	79
2 11	91	8 69	09	71	18 01	53	39	87

Tabela 1.3 (continuare)

28 97	33 07	36 59	40 49	44 51	48 71	52 61	56 53	60 53
	13	71	51	57	77	73	57	67
29 03	19	73	57	63	89	79	59	73
09	23	77	73	81		81	69	79
17	29	91	79	83	49 03	97	83	80
27	31	97	91	93	09		89	91
39	43		93	—	19	53 03	93	
53	47	37 01	99		31	09		61 01
57	59	09		45 07	33	23	57 01	13
63	61	19	41 11	13	37	33	11	21
69	71	27	27	17	43	47	17	31
71	73	33	29	19	51	51	37	33
99	89	39	33	23	57	81	41	43
	91	61	39	47	67	87	43	51
30 01		67	53	49	69	93	49	63
11	34 07	69	57	61	73	99	79	73
19	13	79	59	67	87		83	97
23	33	93	77	83	93	54 07	91	99
37	49	97		91	99	13		
41	57		42 01	97	.	17	58 01	62 03
49	61	38 03	11			19	07	11
61	63	21	17	46 03	50 03	31	13	17
67	67	23	19	21	09	37	21	21
79	69	33	29	37	11	41	27	29
83	91	47	31	39	21	43	39	47
89	99	51	41	43	23	49	43	57
	—	53	43	49	39	71	49	63
31 09		63	53	51	51	77	51	69
19	35 11	77	59	57	59	79	57	71
21	17	81	61	63	77	83	61	77
37	27	89	71	73	81	—	67	87
63	29		73	79	87		69	99
67	33	39 07	83	91	99	55 01	79	
69	39	11	89			03	81	63 01
81	41	17	97	47 03	51 01	07	97	11
87	47	19		21	07	19		17
91	57	23	43 27	23	13	21	59 03	23
	59	29	37	29	19	27	23	29
32 03	71	31	39	33	47	31	27	37
09	81	43	49	51	53	57	39	43
17	83	47	57	59	67	63	53	53
21	83	67	63	83	71	69	53	59
29	93	89	73	87	79	73	81	61
51			91	89	89	81	87	67
53	36 07	40 01	97	93	97	91		73
57	13	03		99			60 07	79
59	17	07	44 09	48 01	52 09	56 23	11	89
71	23		21	13	27	39	29	97
99	31	13	23	17	31	41	37	
	37	19	23	17	31	41	37	
33 01	43	21	41	31	33	47	43	64 21
		27	47	61	37	51	47	27

Tabela 1.3 (continuare)

64 49	68 63	72 83	76 87	81 17	85 63	89 63	93 77	97 81
51	69	97	91	23	73	69	91	87
69	71		99	47	81	71	97	91
73	83	73 07		61	97	99		
81	99	09	77 03	67	99		94 03	98 03
91		21	17	71		90 01	13	11
—	69 07	31	23	79	86 09	07	19	17
	11	33	27	91	23	11	21	29
65 21	17	49	41		27	13	31	33
29	47	51	53	82 09	29	29	33	39
47	49	69	57	19	41	41	37	51
51	59	93	59	21	47	43	39	57
53	61		89	31	63	49	61	59
63	67	74 11	93	33	69	59	63	71
69	71	17		37	77	67	67	83
71	77	33	78 17	43	81	91	73	87
77	83	51	23	63	89		79	
81	91	57	29	69	93	91 03	91	59 01
99	97	59	41	73	99	09	97	
		77	53	87		27	—	07
66 07		81	67	91	87 07	33		23
19	70 01	87	73	93	13	37	95 11	29
37	13	89	77	97	19	51	21	31
53	19	99	79		31	57	33	41
59	27	—	83	83 11	37	61	39	49
61	39			17	41	73	47	67
73	43	75 07	79 01	29	47	81	51	73
79	57	17	07	53	53	87	87	
89	69	23	19	63	61	99		
91	79	29	27	69	79		96 01	
		37	33	77	83	92 03	13	
67 01	71 03	41	37	87		09	19	
03	09	47	49	89	88 03	21	23	
09	21	49	51		07	27	29	
19	27	59	63	84 19	19	39	31	
33	29	61	93	23	21	41	43	
37	51	73		29	31	57	49	
61	59	77		31	37	77	61	
63	77	83	80 09	43	39	81	77	
79	87	89	11	47	49	83	79	
81	93	91	17	61	61	93	89	
91			39	67	63		97	
93	72 07	76 03	53	—	67			
	11	07	59		87	93 11	97 19	
68 03	13	21	69	85 01	93	19	21	
23	19	39	81	13		23	33	
27	29	43	87	21	89 23	37	39	
29	37	49	89	27	29	41	43	
33	43	69	93	37	33	43	49	
41	47	73	81 01	39	41	49	67	
57	53	81	11	43	51	71	69	



Tabela 1.4 Cei mai mici divizori ai numerelor de la 169 la 10 000

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D
169	13	9 43	23	15 13	17	20 47	23	25 37	43	30 43	17	34 97	13
		49	13	17	37	59	29	61	13	53	43		
221	13	61	31	37	29	71	19	67	17	71	37	35 03	31
47	13	89	23	41	23	77	31	73	31	77	17	23	13
89	17			77	19			81	29	97	19	51	53
99	13			91	37	21 17	29	87	13			69	43
		10 03	17			19	13	99	23	31 03	29	87	17
323	17	07	19	16 33	23	47	19			07	13	89	37
61	19	27	13	43	31	59	17	26 03	19	27	53	99	59
77	13	37	17	49	17	71	13	23	43	31	31		
91	17	73	29	51	13	73	41	27	37	33	13	36 01	13
		79	13	79	23	83	37	41	19	39	43	11	28
408	13	81	23	81	41	97	13	69	17	49	47	29	19
37	19			91	19					51	23	49	41
81	13	11 21	19			22 01	31	27 01	37	61	29	53	13
93	17	39	17	17 03	13	09	47	43	13	73	19	67	19
		47	31	11	29	27	17	47	41	93	31	79	13
527	17	57	13	17	17	31	23	59	31	97	23	83	29
29	23	59	19	39	37	49	13	71	17				
33	13	89	29	51	17	57	37	73	47	32 11	13	37 18	47
51	19			63	41	63	31			33	53	21	61
59	13	12 07	17	69	29	79	43	28 09	53	39	41	37	37
89	19	19	23	81	13	91	29	13	29	47	17	43	19
		41	17					31	19	63	13	49	23
611	13	47	29	18 07	13			39	17	77	29	57	13
29	17	61	13	17	23	23 23	23	67	47	81	17	63	53
67	23	71	13	19	17	27	13	69	19	87	19	81	19
89	13	73	31	29	31	29	17	73	13	93	37	91	17
97	17			43	19	53	13	81	43			99	29
		13 13		49	43	63	17	99	13	33 17	31		
708	19	33	13	53	17	69	23			37	47	38 09	13
13	23	39	31	91	31			29 11	41	41	13	11	37
17	17	43	13			24 07	29	21	23	49	17	27	43
31	13	49	17	19 09	23	13	19	23	37	79	31	41	23
67	19	57	19	19	19	19	41	29	29	83	17	59	17
79	13	63	23	21	17	49	31	41	17	97	43	69	53
93	17	69	29	27	41	61	23	51	13			87	13
99		87	37	37	13	79	37	77	13	34 01	19	93	17
817	19	91	19	43	29	83	13	83	19	03	41		
41	29	14 03	13	57	19	89	19	87	29	19	13	39 01	47
29	29			61	37	91	47	93	41	27	23	37	31
31	23	11	23	63	13					13	47	53	59
71	13	17	17			25 01	41			39	19	59	37
93	19					07	23	30 07	31	73	23	61	17
99	29	57	13	20 21	43	09	13	13	23	81	59	73	29
		69	31	33	19	33	17	29	16				
901	17			41	13								
23	13	15 01	19										

Tabela 1.4 (continuare)

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D							
39	77	41	44	29	43	48	59	43	53	17	13	57	71	29	61	91	41	66	31	19
79	23	39	23	67	31	21	17	73	23	73	23	73	23	73	23	73	23	73	23	73
91	13	53	61	83	19	29	73	77	53	62	27	13	47	17	47	17	47	17	47	17
		69	41	91	67	39	19	39	19	33	23	39	17	67	59	41	79	83	41	61
		71	17	97	59	53	53	58	09	37	39	17	67	59	41	79	83	41	61	61
40	09	19	89	67		59	23	33	19	41	79	83	41	79	83	41	79	83	41	79
31	29				49	01	13	63	31	37	13	53	13	97	37					37
33	37	45	11	13	13	17	71	41	91	43	83	61								
43	13	31	23	27	13	77	19	93	71	89	19	67	07	19	31	53				
61	31	37	13	79	13	89	17	99	17											
63	17	41	19	81	17					63	13	59	39	23						
69	13	53	29	97	19	54	29	61	59	09	19	19	71	49	17					
87	61	59	47			47	13	11	23	31	13	51	43	43						
97	17	73	17			59	53	17	61	41	17	57	29	29						
		77	23	50	17	29	61	43	21	31	71	23	67	67						
41	17	23	79	19	29	47	73	13	33	17	83	13	73	13						
21	13	89	13	41	71	91	17	41	13				99	13						
41	41			53	31	97	23	47	19	64	01	37								
63	23	46	01	43	57	13		59	59	03	19	68	17	17						
71	43	07	17	63	61	55	13	37	63	67	07	43	21	19						
81	37	19	31	69	37	39	29	69	47	09	13	51	13	41						
83	47	33	41	83	13	43	23	83	31	31	59	59	19	19						
87	53	61	59	51	11	19	49	31	89	53	37	41	77	13						
89	59	67	13	23	47	61	67	93	13	39	47	87	71	71						
5	13	81	31	29	23	67	19			43	17	89	83	83						
42	23	41	81	31	41	53	67	19				63	23	93	61					
37	19	87	43	43	37	87	37			60	01	17	67	29						
47	31	93	13	49	19	97	29			19	13	87	13	69	01	67				
67	17	99	37	61	31	56	03	13	23	19	93	43	13	31						
				77	71	09	71	31	37	97	73	29	13	31						
43	08	13	47	09	17	77	71	11	31	49	23	99	67	43						
07	59	17	53	83	29			17	41	59	73	65	09	23						
09	31	27	29	91		41	27	17	71	13	65	09	23	53	17					
13	19	47	47		52	07	13	29	13	77	59	11	17	73	19					
21	29	57	67		13	17	33	43				27	61	89	29					
31	61	69	19	19	23	71	53	61	03	17	33	47								
43	43	71	13	21	13	81	13			07	31	39	13							
51	19	77	17	39	29	99	41			09	41	41	31	70	03	47				
69	17			48	11	17	49	59		19	29	57	79	09	43					
79	29	19	61	51	19	57	07	13	37	17	83	29	31	79						
81	13	41	47	63	23	13	29	57	47	93	19	33	13							
87	41	43	29	67	17	23	59	61	61			37	31							
93	23	47	37	87	67	29	17	69	31	66	12	17	61	23						
99	53	49	13	93		59	13	79	37	17	13	67	37	37						
44	27	19	53	23	58	11	47	57	73	87	23	23	37	81	73					

Tabela 1.4 (continuare)

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D							
70	87	19	74	53	29	79	21	89	83	33	13	87	49	13	91	69	53	95	99	29
98	41	68	17	39	17	39	17	39	31	31	19	59	19	79	67	67	67	67	67	67
97	47	71	31	43	13	41	19	73	31	93	29	96	07	13	17	17	17	17	17	17
99	31	93	59	57	73	47	17	77	67	97	17	37	23	59	61	19	57	61	19	57
71	11	13	75	01	13	67	31	59	13	97	19	92	11	61	41	31	31	31	31	31
23	41	17	19	73	69	13	81	17	83	83	88	01	13	23	23	23	23	23	23	23
53	37	31	17	79	79	83	83	88	01	13	09	23	53	19	73	17	73	17	73	17
57	23	43	19	81	23	99	37	09	43	37	59	47	83	23	23	23	23	23	23	23
63	17	71	67	91	61	99	19	84	01	31	51	53	63	59	59	59	59	59	59	59
69	13	97	71	99	19	84	01	11	13	57	17	69	13	97	01	89	89	89	89	89
71	67	76	13	23	23	13	47	73	19	71	73	03	31	31	31	31	31	31	31	31
81	71	19	19	80	03	53	17	19	79	13	87	37	07	17	17	17	17	17	17	17
99	43	27	29	21	13	41	23	81	83	99	17	27	71	71	71	71	71	71	71	71
72	01	31	13	23	71	53	79	91	17	89	03	29	93	01	71	61	43	43	43	43
23	19	33	17	27	23	71	43	89	03	29	93	01	71	61	43	43	43	43	43	43
41	31	57	13	33	29	73	37	09	59	07	41	63	13	67	73	29	29	29	29	29
61	13	61	47	47	13	79	61	17	37	13	67	13	67	73	29	29	29	29	29	29
67	53	63	79	51	83	83	17	27	79	29	19	47	13	97	97	97	97	97	97	97
67	13	97	43	77	41	89	13	47	23	47	13	53	47	99	41	41	41	41	41	41
77	19	77	09	13	81	19	23	59	59	67	17	67	17	98	09	17	17	17	17	17
79	29	29	59	81	19	23	85	07	47	77	47	79	83	98	09	17	17	17	17	17
89	37	39	71	31	47	09	67	83	13	89	89	94	97	23	41	13	13	13	13	13
91	23	47	61	43	17	31	19	89	89	93	17	09	97	47	43	43	43	43	43	43
73	03	67	69	23	49	29	49	83	93	17	51	13	53	59	69	71	69	71	69	71
13	71	71	17	53	31	51	17	90	17	71	69	17	69	71	69	71	69	71	69	71
19	13	81	19	59	41	57	43	19	29	81	19	81	19	81	41	41	41	41	41	41
27	17	83	31	77	13	67	13	47	83	87	53	93	13	99	19	19	19	19	19	19
39	41	87	43	89	19	87	31	61	13	61	13	95	03	13	99	13	23	23	23	23
61	17	78	01	82	01	59	93	13	71	47	09	37	99	13	23	23	23	23	23	23
63	37	07	29	03	13	86	11	70	73	43	17	31	17	47	47	47	47	47	47	47
67	53	11	37	07	29	21	37	77	29	23	89	37	19	33	89	83	31	29	13	43
73	73	13	73	13	43	33	89	83	31	29	13	43	61	53	41	53	37	19	37	19
79	47	31	13	27	19	39	53	89	61	29	13	43	61	53	41	53	37	19	37	19
87	83	31	41	49	73	39	53	89	61	29	13	43	61	53	41	53	37	19	37	19
91	19	37	41	49	73	39	53	89	61	29	13	43	61	53	41	53	37	19	37	19
97	13	49	17	51	37	51	41	91	01	19	57	19	59	23	59	23	23	23	23	23
74	09	59	47	57	23	53	17	13	13	63	73	71	13	71	13	71	13	71	13	71
21	41	71	17	69	17	71	13	31	23	71	17	79	17	79	17	79	17	79	17	79
23	13	91	13	99	43	83	19	39	13	77	61	83	67	83	67	83	67	83	67	83
29	17	97	53	83	03	19	87	11	31	43	41	89	43	91	97	91	97	91	97	91
39	43	79	13	41	21	53	17	23	67	89	93	53	97	13	97	13	97	13	97	13

Tabela 1.5. Părți proporționale pentru interpolări liniare ale numerelor de 11 la 90

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0

Tabela 1.5 (continuare)

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

Tabela 1.5 (continuare)

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

## 2. ALGEBRA

### 2.1. Elemente de logică matematică

#### 2.1.1. Noțiunea de propoziție

*Definiție.* Se numește propoziție un enunț despre care se poate spune că este adevărat sau fals, dar nu și adevărat și fals simultan.

Se notează cu  $p, q, P, Q$ .

*Exemple:*

1)  $\pi \notin \mathbb{Q}$ ; acesta este un enunț care exprimă un adevăr, deci este o propoziție adevărată;

2)  $x + 5 = 3, x \in \mathbb{N}$  este o propoziție falsă, pentru că nu există nici un număr natural astfel ca  $x + 5 = 3$ ;

3)  $x \leq y, x, y \in \mathbb{N}$  este un enunț despre care nu se poate spune nimic. Deci nu este o propoziție.

*Valoarea logică sau valoarea de adevăr a unei propoziții.* Dacă o propoziție  $p$  este adevărată se spune că are valoarea logică sau valoarea de adevăr: *adevărul*; această valoare de adevăr se notează cu simbolul 1 sau  $a$  și scriem  $v(p) = 1$  sau  $v(p) = a$ . Dacă o propoziție  $q$  este falsă, se spune că are valoarea de adevăr: *falsul*; această valoare de adevăr se notează cu simbolul 0 sau  $f$  și scriem  $v(q) = 0$  sau  $v(q) = f$ .

#### 2.1.2. Conectori (operatori) logici

*Negația.* Negația unei propoziții  $p$  este propoziția care este falsă când  $p$  este adevărată și este adevărată când  $p$  este falsă.

Se notează non  $p, \neg p, \bar{p}$ .

Tabela de adevăr \* a propoziției non  $p$  se întocmește pe baza relației  $v(\text{non } p) = 1 - v(p)$ :

$p$	non $p$
1	0
0	1

*Exemplu.* Dacă  $p$  este propoziția „ $d$  și  $d'$  sunt două drepte paralele”, atunci non  $p$  este propoziția „ $d$  și  $d'$  au un punct comun” sau „ $d$  și  $d'$  nu sunt paralele”; dacă  $p$  este propoziția „ $|x| = x, x \in \mathbb{R}$ ”, atunci non  $p$  este propoziția „ $x < 0, x \in \mathbb{R}$ ”.

*Conjuncția.* Conjuncția a două propoziții  $p$  și  $q$  este propoziția care este adevărată dacă și numai dacă fiecare propoziție  $p$  și  $q$  este adevărată.

Se notează:  $p \wedge q$ ; „ $p$  și  $q$ ”;  $p \& q$ .

\* Negația poate fi interpretată ca o funcție definită pe  $\{0, 1\}$  cu valori în  $\{0, 1\}$ , dată de tabela de adevăr. Analog pot fi interpretate disjuncția, conjuncția etc.

Tabela de adevăr a propoziției „ $p$  și  $q$ ” este

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

*Proprietăți.* Conjuncția propozițiilor este comutativă și asociativă.

Asociativitatea conjuncției rezultă din următoarea tabelă de adevăr:

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

**Disjuncția.** Disjuncția a două propoziții  $p$  și  $q$  este propoziția care este adevărată dacă și numai dacă cel puțin una din propozițiile  $p$ ,  $q$  este adevărată.

Se notează  $p \vee q$ ; „ $p$  sau  $q$ ”.

Tabela de adevăr a propoziției „ $p$  sau  $q$ ” este

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*Proprietăți.* Disjuncția propozițiilor este comutativă și asociativă.

**Implicația.** Implicația propozițiilor  $p$  și  $q$  este propoziția care este falsă dacă și numai dacă  $p$  este adevărată și  $q$  falsă.

Se notează:  $(\text{non } p)$  sau  $q$ ,  $p \rightarrow q$  și se citește: „ $p$  implică  $q$ ” sau „dacă  $p$ , atunci  $q$ ”. Propoziția  $p$  este ipoteza, iar propoziția  $q$  concluzia.

Tabela de adevăr a propoziției „(non  $p$ ) sau  $q$ ” este

$p$	$q$	non $p$	(non $p$ ) sau $q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1



*Exemplu.* Dacă  $p$  este propoziția „triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$ ” și  $q$  este propoziția „triunghiul  $ABC$  are  $\widehat{B} = 20^\circ$  și  $\widehat{C} = 70^\circ$ ”, atunci  $q \rightarrow p$  este o propoziție adevărată. În schimb  $p$  nu implică  $q$ .

*Proprietăți.* Implicația propozițiilor nu este comutativă:  $(p \rightarrow q)$  și  $(q \rightarrow p)$  nu au aceleași valori logice, oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor  $p$  și  $q$ . Însă  $(p \rightarrow q)$  și  $(\text{non } q \rightarrow \text{non } p)$  au aceleași valori logice.

Dacă  $p$  și  $(p \rightarrow q)$  sînt adevărate, atunci și  $q$  este adevărată. Această proprietate se numește *modus ponens*.

*Echivalența logică.* Propozițiile  $p$  și  $q$  sînt echivalente logic, dacă și numai dacă  $p$ ,  $q$  sînt adevărate sau sînt false simultan.

Se notează: „ $(\text{non } p) \vee q$  și  $(\text{non } q) \vee p$ ”; „ $(p \rightarrow q)$  și  $(q \rightarrow p)$ ”; „ $p \leftrightarrow q$ ”; se citește: „ $p$  echivalent cu  $q$ ” sau „ $p$  dacă și numai dacă  $q$ ”; „ $p$  este condiție necesară și suficientă pentru  $q$ ”.

*Exemplu.*  $(x > 4 \text{ și } x > 6) \leftrightarrow x > 6, x \in \mathbf{R}$ .

Tabela de adevăr corespunzătoare propoziției compuse  $p \leftrightarrow q$  este:

$p$	$q$	$\text{non } p$	$\text{non } q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

*Proprietăți.* Echivalența este comutativă și asociativă.

*Incompatibilitatea.* Incompatibilitatea a două propoziții  $p$  și  $q$  se exprimă printr-o propoziție care este adevărată cînd cel puțin una din ele este falsă și este falsă cînd și  $p$  și  $q$  sînt adevărate.

Se notează  $p \mid q$ .

Tabela de adevăr pentru  $p \mid q$  este:

$p$	$q$	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

### 2.1.3. Expresii în calculul propozițiilor

Propozițiile  $p, q, r, \dots$  fiind date, cu ajutorul conectorilor logici  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \mid$  putem forma diferite asamblaje, care se numesc *formule ale calculului cu propoziții sau expresii logice*. Ele se notează  $\alpha$  sau  $\alpha(p, q, r, \dots)$ ,  $\beta$  sau  $\beta(p, q, r, \dots)$ .

Înlocuind în  $\alpha$  pe  $p, q, r, \dots$  cu diferite propoziții obținem o altă propoziție, adevărată sau nu, a cărei valoare de adevăr se numește *valoarea expresiei  $\alpha$* , obținută pentru propozițiile  $p, q, r, \dots$  respective.

Asupra unei expresii logice se pot efectua transformări logice, cum sînt: transformarea prin inversiune, reciprocitatea, corelația sau transformarea identică.

**Tautologie.** O expresie logică  $\alpha$  care se reduce la o propoziție adevărată, oricare ar fi propozițiile  $p, q, r, \dots$  se numește *tautologie*.

Unele tautologii se pot lua drept *axiom*, adică drept propoziții adevărate prin definiție, și cu ajutorul acestor axiome se pot da demonstrații ale unor *teoreme* sau *teze*, folosind anumite reguli sau criterii (de substituție și deducție) dintre care menționăm *regula de inferență*.

**Expresii echivalente.** Două expresii logice  $\alpha$  și  $\beta$  se numesc echivalente dacă și numai dacă pentru orice propoziții  $p, q, r, \dots$  cele două expresii reprezintă propoziții care au aceleași valori de adevăr. În scris se notează  $\alpha \equiv \beta$ .

**Exemplu**  $\alpha = \text{non } (p \wedge q)$  și  $\beta = \text{non } p \vee \text{non } q$  sint expresii logice echivalente.

## 2.1.4. Noțiunea de predicat

**Definiție.** Se numește *predicat sau propoziție cu variabile un enunț care depinde de o variabilă sau de mai multe variabile și are proprietatea că pentru orice valori date variabilelor se obține o propoziție adevărată sau o propoziție falsă*.

Predicatele se notează  $p(x, y, z, \dots)$ ,  $q(x, y, z, \dots)$  și pot fi unare (de o variabilă), binare (de două variabile), ternare (de trei variabile) etc., variabilele  $x, y, z, \dots$  luând valori în mulțimi date.

**Echivalența a două predicate.** Predicatele  $p(x, y, z, \dots)$  și  $q(x, y, z, \dots)$  se numesc echivalente dacă, oricare ar fi valorile pe care le iau  $x, y, z, \dots$  în unul și același domeniu, propozițiile corespunzătoare au aceleași valori de adevăr. Scriem  $p(x, y, z, \dots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \dots)$ . Evident,  $p(x, y, z, \dots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \dots)$  dacă  $p(x, y, z, \dots) \Rightarrow q(x, y, z, \dots)$  și  $q(x, y, z, \dots) \Rightarrow p(x, y, z, \dots)$ .

## 2.1.5. Cuantificatori

**Cuantificatorul existențial.** Fie  $p(x)$ , cu  $x \in M$ , un predicat. Dacă există (cel puțin) un element  $x' \in M$ , astfel încât propoziția  $p(x')$  este adevărată, atunci scriem  $\exists x p(x)$ ,  $(\exists x) p(x)$  sau  $(\exists x \in M) p(x)$ . Simbolul  $\exists$  se numește *cuantificator existențial* și se citește „există”.

**Exemplu.**  $(\exists x \in \mathbb{Z}) x^2 - 1 = 0$ .

**Cuantificatorul universal.** Fie  $p(x)$ , cu  $x \in M$ , un predicat. Dacă  $p(x)$  este o propoziție adevărată pentru orice  $x \in M$ , atunci scriem  $\forall x p(x)$ ,  $(\forall x) p(x)$  sau  $(\forall x \in M) p(x)$ . Simbolul  $\forall$  se numește *cuantificator universal* și se citește „oricare ar fi”.

**Exemplu.**  $\forall x \in \mathbb{R} |x| \geq 0$ .

*Proprietatea de comutativitate a cuantificatorilor:*

- $(\forall x) (\forall y) p(x, y) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) p(x, y)$ ;
- $(\exists x) (\exists y) p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) p(x, y)$

*Reguli de negare:*

$$\neg[(\exists x) p(x)] \Leftrightarrow [(\forall x) \neg p(x)]; \quad \neg[(\exists x) (\exists y) p(x, y)] \Leftrightarrow [(\forall x) (\forall y) \neg p(x, y)]$$

$$\neg[(\forall x) p(x)] \Leftrightarrow [(\exists x) \neg p(x)]; \quad \neg[(\forall x) (\forall y) p(x, y)] \Leftrightarrow [(\exists x) (\exists y) \neg p(x, y)].$$

**Exemple:** 1) Propoziția „ $(\exists x \in \mathbb{Q}) x^2 = 2$ ” este falsă. Negatia ei este propoziția „ $(\forall x \in \mathbb{Q}) x^2 \neq 2$ ” și reprezintă o propoziție adevărată.

2) Este cunoscută definiția convergenței unui șir de numere reale către un număr  $a$ :

$$„\exists a \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon”.$$

Negația acestei propoziții este

$$„\forall a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n > N, |a_n - a| \geq \varepsilon”.$$

Astfel se vede clar că pentru a obține negarea unei propoziții este suficient să înlocuim un cuantificator prin altul și să transformăm concluzia în negația sa.

### 2.1.6. Metoda de demonstrație prin reducere la absurd

Această metodă se bazează pe tautologia

$$(p \rightarrow q) \equiv (\text{non } q \rightarrow \text{non } p),$$

care ne arată că pentru a demonstra că  $p \rightarrow q$ , este totuna cu a demonstra că  $\text{non } q \rightarrow \text{non } p$ .

### 2.1.7. Proprietăți fundamentale ale conectorilor (operatorilor) logici

Oricare ar fi propozițiile  $p, q, r, \dots$ , avem

1)  $\text{non}(\text{non } p) \equiv p$

2)  $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$  (comutativitatea conjuncției).

3)  $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$  (asociativitatea conjuncției).

4)  $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$  (comutativitatea disjuncției).

5)  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$  (asociativitatea disjuncției).

6)  $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$  (transitivitatea implicației).

7)  $\left. \begin{array}{l} \text{non}(p \wedge q) \equiv (\text{non } p) \vee (\text{non } q) \\ \text{non}(p \vee q) \equiv (\text{non } p) \wedge (\text{non } q) \end{array} \right\}$  legile lui de Morgan

8)  $\left. \begin{array}{l} [p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \\ [p \vee (q \wedge r)] \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array} \right\}$  conjuncția este distributivă în raport cu disjuncția și de asemenea disjuncția este distributivă în raport cu conjuncția.

## 2.2. Mulțimi

*Moduri de definire a mulțimilor.* Mulțimile se definesc fie prin indicarea elementelor lor (de pildă  $\{0, 1, 3\}$  sau  $\{x, y, z\}$ ), fie prin specificarea unei proprietăți caracteristice a elementelor lor (de exemplu  $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ).

Mulțimile se notează cu litere mari:  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ , iar elementele lor cu litere mici:  $a, b, c, \dots$

*Apartenența unui element la o mulțime.* Dacă un element  $a$  aparține unei mulțimi  $A$ , aceasta se notează  $a \in A$  și se citește „ $a$  aparține lui  $A$ ”.

*Exemplu.* Dacă  $M = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ , atunci putem scrie  $a \in M$ . De asemenea  $4 \in \mathbb{N}$ .

Negația acestei relații, neapartenența lui  $b$  la mulțimea  $B$ , se scrie  $b \notin B$ .

De pildă  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ .

*Mulțimea vidă* este mulțimea care nu are nici un element. Se notează  $\emptyset$ .

**Egalitatea mulțimilor  $A$  și  $B$ :**  $(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$  și  $(\forall y \in B \Rightarrow y \in A)$ .

*Exemple.*  $\{1, 2, 4, 8\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este divizor natural al lui } 8\}$ ;  $\{1, 7, 3\} = \{1, 3, 7\}$ .

*Proprietățile egalității:* 1.  $\forall A, A = A$  (reflexivitatea)

2.  $(A = B) \Rightarrow (B = A)$  (simetria)

3.  $(A = B \text{ și } B = C) \Rightarrow (A = C)$  (tranzitivitatea)

**Incluziunea mulțimii  $A$  în mulțimea  $B$ :**  $(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ . Mulțimea  $A$  se numește o parte sau o submulțime a lui  $B$ .

*Exemplu.*  $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ .

*Proprietățile incluziunii.* 1.  $\forall A, A \subset A$  (reflexivitatea)

2.  $(A \subset B) \text{ și } (B \subset A) \Rightarrow (A = B)$  (antisimetria)

3.  $(A \subset B \text{ și } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$  (tranzitivitatea)

4.  $\forall A, \emptyset \subset A$ .

Relația de *neincluziune* se notează  $A \not\subset B$  și se citește „ $A$  nu e o parte a lui  $B$ ”.

**Reuniunea mulțimilor  $A$  și  $B$ :**  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ .

*Exemplu.*  $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .

*Proprietățile reuniunii:* 1.  $\forall A, B: A \cup B = B \cup A$  (comutativitatea)

2.  $\forall A, B, C: (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (asociativitatea)

3.  $\forall A: A \cup A = A$  (idempotența)

4.  $\forall A, A \cup \emptyset = A$

5.  $\forall A, B: A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$ .

**Intersecția mulțimilor  $A$  și  $B$ :**  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ .

*Exemplu.*  $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4\} = \{1, 2\}$ .

*Proprietățile intersecției:* 1.  $\forall A, B: A \cap B = B \cap A$  (comutativitatea)

2.  $\forall A, B, C: (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (asociativitatea)

3.  $\forall A, A \cap A = A$  (idempotența)

4.  $\forall A, A \cap \emptyset = \emptyset$

5.  $\forall A, B: A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$ .

6.  $\forall A, B, C: (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  (distributivitatea intersecției față de reuniune)

7.  $\forall A, B, C: (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  (distributivitatea reuniunii față de intersecție)

8.  $\forall A, B: A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$  (absorbția)

Mulțimile  $A$  și  $B$  care nu au nici un element comun se numesc *disjuncte*. Pentru ele avem  $A \cap B = \emptyset$ .

*Exemplu.* Mulțimile  $A = [1, 2]$  și  $B = [3, 4]$  sînt disjuncte.

**Diferența mulțimilor  $A$  și  $B$ :**  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ .

*Exemplu:*  $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 5, 6\} = \{1, 3\}$ .

*Proprietățile diferenței:* 1.  $\forall A; A \setminus A = \emptyset$ .

2.  $\forall A, B, C; (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

3.  $\forall A, B; A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

4.  $\forall A, B; A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ .

**Diferența simetrică a mulțimilor  $A$  și  $B$ :**  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

*Exemplu:* Pentru  $A = \{1, 2, 3\}$  și  $B = \{1, 4, 5\}$ , avem  $A \triangle B = \{2, 3, 4, 5\}$ .

*Proprietățile diferenței simetrice:* 1.  $\forall A. A \triangle A = \emptyset$ .

2.  $\forall A, B. A \triangle B = B \triangle A$  (comutativitatea).

3.  $\forall A. A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$ .

4.  $\forall A, B, C. (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$  (asociativitatea).

5.  $\forall A, B, C. A \cap (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle (A \cap C)$ .

6.  $\forall A, B. A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$ .

**Complementara unei mulțimi  $A$  în raport cu mulțimea  $E$  ( $A$  fiind o parte a lui  $E$ , adică  $A \subset E$ ):**

$$C_E A = \{x \mid x \in E \text{ și } x \notin A\}.$$

*Exemplu:*  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1, 3\}$ ;  $C_E A = \{2, 4\}$ .

*Proprietăți:* ( $\forall A, B \subset E$ ): 1.  $C_E(C_E A) = A$  (principiul reciprocității)

2.  $C_E A = E \setminus A$ .

5.  $A \cup C_E A = E$  (principiul excluderii terțiului)

3.  $C_E \emptyset = E$ .

4.  $C_E E = \emptyset$ .

6.  $A \cap C_E A = \emptyset$  (principiul necontradicției)

7.  $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$

**Formulele lui de Morgan** ( $\forall A, B \subset E$ )

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B.$$

$$\text{non } (p \vee q) \equiv \text{non } p \wedge \text{non } q; \text{non } (p \wedge q) \equiv \text{non } p \vee \text{non } q.$$

**Produsul cartezian a două mulțimi  $A$  și  $B$ :**

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

*Exemplu.*  $\{1, 2\} \times \{0, 3\} = \{(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\}$ .

**Proprietățile produsului cartezian** ( $\forall A, B, C, D$  avem): 1.  $A \times B \neq B \times A$ , dacă  $A \neq B$ ,  $\forall A, B, C, D$  avem

2.  $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$

3.  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

4.  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

5.  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

**Mulțimi echipotente.** Mulțimile  $A$  și  $B$  se numesc echipotente dacă există o bijecție de la  $A$  la  $B$ .

*Exemplu:*  $A = \{1, 2, 3\}$  și  $B = \{a, b, c\}$  sînt mulțimi echipotente.

Mulțimea  $N$  și mulțimea numerelor pare sînt mulțimii echipotente.

*Mulțime finită.* Fie  $E$  o mulțime. Aceasta se numește finită dacă  $E = \emptyset$  sau dacă există  $n \in \mathbb{N}$ , astfel încît  $E$  este echipotentă cu mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

*Mulțimea infinită.* O mulțime  $E$  se numește infinită dacă ea nu este finită. Exemple de mulțimi infinite sînt:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ .

*Mulțime numărabilă.* Fie  $E \subset$  mulțime. Aceasta se numește numărabilă dacă este echipotentă cu  $\mathbb{N}$ . Exemplu: Mulțimea numerelor raționale.

*Mulțime cel mult numărabilă.* O mulțime  $E$  se numește cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.

*Cardinalul unei mulțimi.* Fie  $E$  o mulțime. Se numește *cardinalul* acestei mulțimi un simbol asociat ei, notat  $|E|$  sau  $\text{card } E$ , astfel încît  $|E| = |F|$  dacă și numai dacă  $E$  este echipotentă cu  $F$ ; cardinalul mulțimei vide se notează cu  $0$ , cardinalul mulțimei  $\{1, 2, \dots, n\}$ , cu  $n \in \mathbb{N}$ , se notează cu  $n$ , iar cardinalul mulțimei  $\mathbb{N}$  se notează cu  $\aleph_0$  (alef zero).

Mulțimea tuturor părților unei mulțimi  $E$ , notată  $P(E)$ . Dacă:

$E = \emptyset$ , atunci  $P(E) = \{\emptyset\}$ ,  $\text{card } P(E) = 1 = 2^0$ ;

$E = \{a\}$ , atunci  $P(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$ ,  $\text{card } P(E) = 2 = 2^1$ ;

$E = \{a_1, a_2\}$ , atunci  $P(E) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$ ,  $\text{card } P(E) = 4 = 2^2$ ;

.....

$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $P(E) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$ ,  $\text{card } P(E) = 2^n$ .

Mulțimea  $P(E)$  împreună cu intersecția și diferența simetrică formează un inel.

*Teoremă.* 1. Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi finite. Atunci  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .

2. Fie  $A, B$  și  $C$  trei mulțimi finite. Atunci

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$ .

### 2.3. Relații binare

*Relație binară pe o mulțime.* Fie  $M$  o mulțime nevidă. Se numește *relație binară*  $R$  pe  $M$  o parte a produsului cartezian  $M \times M$ .

Dacă  $x \in M$  este în relația  $R$  cu  $y \in M$ , atunci scriem  $xRy$  sau  $(x, y) \in R$ . Deci o relație binară se referă la perechile de elemente din  $M$ .

*Exemple* Relația „ $\leq$ ” pe  $\mathbb{R}$ ; relația „divide” pe  $\mathbb{Z}$ ; relația de paralelism pe mulțimea dreptelor din  $\mathbb{R}^2$ ; relația „ $\in$ ”; relația „ $\subset$ ” sînt relații binare.

Proprietăți ale relațiilor binare pe o mulțime:

1. Relația binară  $R$  pe mulțimea  $M$  se numește *reflexivă* dacă  $\forall a \in M$  avem  $aRa$ .

2. Relația binară  $R$  pe mulțimea  $M$  se numește *simetrică* dacă,  $\forall a, b \in M$ ,  $aRb$  implică  $bRa$ .

3. Relația binară  $R$  pe mulțimea  $M$  se numește *antisimetrică* dacă  $\forall a, b \in M$ ,  $aRb$  și  $bRa$  implică  $a = b$ .

4. Relația binară  $R$  pe mulțimea  $M$  se numește *tranzitivă* dacă,  $\forall a, b, c \in M$ ,  $aRb$  și  $bRc$  implică  $aRc$ .

*Graficul unei relații R definită pe M.* Se numește *graficul relației R* definită pe  $M$  mulțimea  $G = \{(x, y) \mid xRy\}$ .

*Relație de echivalență.* O relație binară  $R$  definită pe o mulțime nevidă  $M$  se numește *relație de echivalență* dacă ea este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

*Exemple.* 1) Fie  $N$  mulțimea numerelor naturale și numărul 3 fixat. Pe  $N$  stabilim următoarea relație  $R$ :  $a$  și  $b$  din  $N$  sînt în relația  $R$ , dacă  $a$  și  $b$  împărțite la 3 dau același rest.

Scriem  $a \equiv b$  (modulo 3); de pildă  $4 \equiv 1$  (modulo 3). Această relație este o *relație de echivalență*.

2) Fie  $Z$  mulțimea întregilor (raționali). Pe  $Z$  stabilim următoarea relație  $R'$ :  $a$  și  $b$  sînt în relația  $R'$  dacă  $\exists k \in Z$ , astfel încît  $a - b = 2k + 1$ . Relația  $R'$  nu este o relație de echivalență fiindcă, deși este simetrică, ea nu are proprietatea de reflexivitate și cea de tranzitivitate.

*Clase de echivalență.* Fie  $M$  o mulțime nevidă,  $R$  o relație de echivalență pe  $M$  și  $a$  un element fixat din  $M$ . Se numește *clasă de echivalență* corespunzătoare elementului  $a$  mulțimea  $C_a = \{x \in M \mid xRa\}$ .

În exemplul 1) clasele de echivalență sînt următoarele trei mulțimi:

$$\hat{0} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\hat{1} = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$\hat{2} = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

Doă clase de echivalență  $C_a$  și  $C_b$  sau coincid (cînd  $aRb$ ) sau sînt disjuncte.

*Mulțimea cit.* Fie  $M$  o mulțime nevidă și  $R$  o relație de echivalență pe  $M$ . Se numește *mulțime cit* a lui  $M$  în raport cu relația  $R$  și se notează  $M/R$  mulțimea claselor de echivalență.

În exemplul 1) mulțimea cit este  $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ .

*Relație de ordine.* Fie  $M$  o mulțime nevidă; se numește *relație de ordine* pe  $M$  o relație binară care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

Se notează „ $<$ ” sau „ $\leq$ ”.

*Exemple:* 1) Relația cunoscută de ordine naturală „ $\leq$ ” pe  $Z$ ,  $N$ ,  $Q$  și  $R$  este o relație de ordine.

2) Relația „ $\mid$ ” (divide) pe  $N$  este o relație de ordine.

3) Relația de incluziune „ $\subset$ ” pe mulțimea părților unei mulțimi este o relație de ordine.

*Relație de ordine totală.* Fie  $M$  o mulțime nevidă și „ $<$ ” o relație de ordin pe  $M$ . Această relație de ordine se numește *relație de ordine totală* dacă oricare două elemente ale lui  $M$  sînt comparabile, adică  $\forall a, b \in M$  avem sau  $a < b$  sau  $b < a$ .

Mulțimea  $M$  înzestrată cu o relație de ordine totală se numește *mulțime total ordonată*.

*Exemple.* 1) Relația de ordine naturală „ $\leq$ ” pe  $Z$ ,  $N$ ,  $Q$  și  $R$  este o relație de ordine totală.

2) Relația de divizibilitate pe  $N$  nu este o relație de ordine totală, ci de ordine parțială (fiindcă există perechi de elemente din  $N$ , de pildă 3 și 7, care nu sînt comparabile (3 nu divide pe 7 și 7 nu divide pe 3)).

*Relație de bună ordonare. Fie  $M$  o mulțime nevidă. O relație de ordine pe  $M$  se numește relație de bună ordonare dacă orice parte nevidă a lui  $M$  are un cel mai mic element. Mulțimea  $M$ , cu această relație de bună ordonare, se zice bine ordonată.*

O relație de bună ordonare pe  $M$  este o relație de ordine totală pe  $M$ .

*Exemplu.* Mulțimea  $\mathbf{N}$ , cu relația de ordine naturală „ $\leq$ ”, este bine ordonată. Mulțimile  $\mathbf{Q}$  și  $\mathbf{R}$ , cu aceeași relație de ordine, „ $\leq$ ”, nu mai sînt bine ordonate.

## 2.4. Operații cu numere reale

### 2.4.1. Puteri naturale ale numerelor reale

$$1) (+a)^n = +a^n$$

$$7) a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m, b \neq 0.$$

$$2) (-a)^{2n} = +a^{2n}.$$

$$3) (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

$$8) \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = a^{-m}, a \neq 0.$$

$$4) a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$9) (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m.$$

$$5) a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0;$$

$$10) a^0 = 1, a \neq 0.$$

$$6) a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

$$11) 0^n = 0, n \neq 0, n \in \mathbf{N}.$$

Puterile numerelor reale se extind atît pentru exponenți raționali pozitivi sau negativi, cit și pentru exponenți reali, puterile reale fiind definite cu ajutorul șirurilor de puteri raționale. Aceste puteri au proprietăți identice cu cele naturale.

### 2.4.2. Identități fundamentale

Oricare ar fi  $x, y, z, t, a, b, c, d, a_1, \dots, b_1, \dots \in \mathbf{R}$  și  $n \in \mathbf{N}$ , avem:

$$1) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); 4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$2) (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$$

$$3) (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax - by - cz - dt)^2 + (bx + ay - dz + ct)^2 + (cx + dy + az - bt)^2 + (dx - cy + bz + at)^2$$

$$4) a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$5) x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = \\ = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

$$6) x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

$$7) a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$8) a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})$$

$$9) a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$10) a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$11) (1 + a)(1 + a^2 + a^4) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$$



$$12) a^6 + b^6 = (a^3 - 2ab^2)^2 + (b^3 - 2a^2b)^2 \text{ (G. de Racquigny - Adanson).}$$

$$13) * a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$14) a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2)(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + \dots + a^2b^{2n-4} + b^{2n-2})$$

$$15) a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

$$16) (1 + a + a^2 + \dots + a^n)(1 + a^{n+1}) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{2n+1}$$

$$17) (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{2^n}) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{2^{n+1}-1}$$

$$18) (x + a)(x^2 + a^2)(x^4 + a^4) \dots (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}) = \begin{cases} \frac{x^{2^n} - a^{2^n}}{x - a}, & x \neq a \\ 2^n \cdot a^{2^n-1}, & x = a \end{cases}$$

$$19) (x^2 - ax + a^2)(x^4 - a^2x^2 + a^4) \dots (x^{2^n} - a^{2^{n-1}} \cdot x^{2^{n-1}} + a^{2^n}) = \frac{x^{2^{n+1}} + a^{2^n} \cdot x^{2^n} + a^{2^{n+1}}}{x^2 + ax + a^2}$$

20) Identitatea lui Lagrange:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$21) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \quad (\text{E. Catalan}).$$

$$22) (1 + 2^{2n+1} + 2^{2n+1})(1 + 2^{2n+1} - 2^{2n+1}) = 1 + 2^{4n+2} \text{ (Aurifeuille)}$$

### 2.4.3. Radicali. Proprietăți\*\*

$$1) \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} \quad (a \geq 0).$$

$$2) \sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}} \quad (a > 0).$$

$$3) (\sqrt[m]{a})^m = a \quad (a \geq 0)$$

$$4) \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \quad (a, b \geq 0).$$

$$5) \left(\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right)^m = \frac{1}{a} \quad (a > 0)$$

$$6) \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc} \quad (a, b, c \geq 0).$$

$$\begin{aligned} (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) &= \\ a^3 + 2a^2b + a^2b^2 + a^2b &+ \\ + 2ab^2 + b^3 &= \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \end{aligned}$$

\* Identitățile de la 13), 14), 15) ne arată că  $a^n - b^n$  este un multiplu de  $a - b$ , că  $a^{2n+1} + b^{2n+1}$  este multiplu de  $a + b$ , respectiv că  $a^{2n} - b^{2n}$  este multiplu de  $a^2 - b^2$ , rezultate foarte utile în aplicații.

\*\* Indicii radicalilor se consideră numere naturale, mai mari decât 2 sau egale 2.

$$7) \quad {}^m\sqrt{a} : {}^m\sqrt{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

$$8) \quad {}^m\sqrt{a} \cdot {}^n\sqrt{a} = {}^{mn}\sqrt{a^{m+n}} \quad (a \geq 0).$$

$$9) \quad {}^m\sqrt{a} : {}^n\sqrt{a} = {}^{mn}\sqrt{a^{n-m}} \quad (a > 0).$$

$$10) \quad {}^n\sqrt{a^{nm}} = a^m \quad (a \geq 0).$$

$$11) \quad {}^m\sqrt{a^n} = ({}^m\sqrt{a})^n = a^{\frac{n}{m}} \quad (a \geq 0).$$

$$12) \quad {}^{mn}\sqrt{a^{mp}} = {}^n\sqrt{a^p} \quad (a \geq 0).$$

$$13) \quad {}^m\sqrt{a^p} \cdot {}^n\sqrt{b^q} = {}^{mn}\sqrt{a^{pn} \cdot b^{qm}} \quad (a, b \geq 0).$$

$$14) \quad {}^m\sqrt{{}^n\sqrt{a}} = {}^{mn}\sqrt{a} = {}^n\sqrt{{}^m\sqrt{a}} \quad (a \geq 0).$$

$$15) \quad {}^m\sqrt{a^p} : {}^n\sqrt{b^q} = {}^{mn}\sqrt{a^{pn} : b^{mq}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

$$16) \quad \sqrt{a^2} = |a| \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$17) \quad {}^{2n+1}\sqrt{-a} = -a^{1/(2n+1)} = -{}^{2n+1}\sqrt{a} \quad (a \geq 0).$$

$$18) \quad ({}^{2n+1}\sqrt{-a})^{2n+1} = -a \quad (a \geq 0).$$

$$19) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \quad (a, b \geq 0).$$

$$20) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{(A+C)/2} \pm \sqrt{(A-C)/2}, \text{ dacă și numai dacă } A^2 - B = C^2.$$

$$21) \quad \text{Cantitatea sau expresia conjugată lui } \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \text{ este } \sqrt{a} \mp \sqrt{b}.$$

$$22) \quad \text{Cantitatea sau expresia conjugată lui } \sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \text{ este } \sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{b^2}.$$

## 2.5. Ecuații și inecuații de gradul întâi

### 2.5.1. Ecuații de gradul întâi sau ecuații afine

$$ax + b = 0, \quad a \in \mathbb{R}, x, b \in \mathbb{R}.$$

Fie  $S$  mulțimea de soluții a acestei ecuații.

$$\text{Dacă: 1) } a \neq 0; \quad x = -\frac{b}{a} \text{ (soluție unică). } S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

$$2) \quad a = 0 \text{ și } b \neq 0, \text{ ecuația nu are soluții. } S = \emptyset.$$

3)  $a = 0$  și  $b = 0$ , orice număr real  $x$  este soluție a ecuației afine date;  $S = \mathbb{R}$ .

Semnul funcției afine:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	semn contrar lui $a$		0 același semn cu $a$

Graficul funcției afine este o linie dreaptă.

## 2.5.2. Inecuații de gradul întâi sau inecuații afine

Cazul 1.  $ax + b > 0$ ,  $a, x, b \in \mathbf{R}$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor.

Dacă: 1)  $a > 0$ ,  $S = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$

2)  $a < 0$ ,  $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

3)  $a = 0$ ,  $b > 0$ ,  $S = \mathbf{R}$

4)  $a = 0$ ,  $b \leq 0$ ,  $S = \emptyset$

Cazul 2.  $ax + b \leq 0$ ,  $a, x, b \in \mathbf{R}$ ,

Dacă: 1)  $a > 0$ ,  $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$

2)  $a < 0$ ,  $S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$

3)  $a = 0$ ,  $b \leq 0$ ,  $S = \mathbf{R}$

4)  $a = 0$ ,  $b > 0$ ,  $S = \emptyset$

Inecuațiile  $ax + b < 0$  și  $ax + b \geq 0$  se reduc la cele două cazuri (prin înmulțirea inecuației respective cu  $-1$  și schimbarea sensului inegalităților).

## 2.5.3. Modulul unui număr real $x$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ x & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Proprietăți:  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  avem:

1)  $|x| \geq 0$ ;  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ; 1'.  $|x| = x$  signum  $x$ .

2)  $|-x| = |x|$ ; 2'.  $x = |x|$  signum  $x$ .

3)  $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ sau } x = -y)$ ,

4)  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ , cu  $a \in \mathbf{R}_+$ .

5)  $-|x| \leq x \leq |x|$ .

6)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

- 7)  $|x - y| \leq |x| + |y|$   
 8)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$   
 9)  $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$   
 10)  $|xy| = |x| \cdot |y|$   
 11)  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

Ecuatii și inecuatii fundamentale, care conțin modulul

- 1)  $|x - a| = b, \quad (a, b, x \in \mathbf{R}, S = \text{mulțimea soluțiilor})$

$b$	$S$
$b < 0$	$\emptyset$
$b = 0$	$\{a\}$
$b > 0$	$\{a - b; a + b\}$

- 2)  $|x - a| > b$

$b$	$S$
$b < 0$	$\mathbf{R}$
$b = 0$	$\mathbf{R} \setminus \{a\}$
$b > 0$	$(-\infty, a - b) \cup (a + b, +\infty)$

- 3)  $|x - a| < b$

$b$	$S$
$b < 0$	$\emptyset$
$b = 0$	$\emptyset$
$b > 0$	$(a - b; a + b)$

## 2.6. Numere complexe

*Definiție.* Se numește *număr complex* orice element  $z = (a, b)$  al mulțimii  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ , înzestrate cu două operații algebrice, adunarea  $\forall z = (a, b), \forall z' = (a', b') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, z + z' := (a + a', b + b')$  și înmulțirea  $\forall z = (a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \forall z' = (a', b') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, zz' := (aa' - bb', ab' + a'b)$ . Mulțimea numerelor complexe se notează cu  $\mathbf{C}$  și este un *corp comutativ*.

### 2.6.1. Forma algebrică a numerelor complexe

$z = a + ib$ , cu  $a = (a, 0)$ ,  $b = (b, 0)$  și  $i = (0, 1)$ , respectiv  $i^2 = -1$

Egalitatea a două numere complexe  $z$  și  $z'$ :

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ și } b = b'$$

\*  $\blacktriangle$  se vedea paragraful cu „Structuri algebrice“

**Adunarea numerelor complexe are proprietățile:** este asociativă, comutativă, admite ca element neutru pe 0 și orice număr complex  $a + ib$  admite un opus  $-a - ib$ .

**Înmulțirea numerelor complexe are proprietățile:** este asociativă, comutativă, admite ca element neutru pe 1, orice număr complex  $(a + bi)$  nenul admite un invers  $\left( (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right)$ ; este distributivă față de adunare:  $z(z' + z'') = zz' + zz'', \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$ .

*Puterile numărului  $i$ :*

$$\forall n \in \mathbb{N}; i^{4m} = 1, i^{4m+1} = i, i^{4m+2} = -1, i^{4m+3} = -i.$$

**Numere complexe conjugate.** Dacă  $z = a + ib$ , atunci numărul  $a - ib$  se numește *conjugatul* lui  $z$  și se notează cu  $a - ib = \overline{a + ib} = \bar{z}$ . Au loc următoarele proprietăți:

$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$ :

- |   |  |
|---|--|
| 1) $z + \bar{z} = 2a$                           | 5) $z\bar{z} = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$                           |
| 2) $z - \bar{z} = 2bi$                          | 6) $\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}}$                         |
| 3) $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$ | 7) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$                                      |
| 4) $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$    | 8) $\overline{\left( \frac{z'}{z} \right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$ |

**Modulul unui număr complex**

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \text{sau} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Avem apoi:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $ z  =  \bar{z} $ ;                          | 2) $ z + z'  \leq  z  +  z' $   |
| 3) $  z  -  z'   \leq  z + z'  \leq  z  +  z' $ |   |
| 4) $ zz'  =  z  \cdot  z' $ ;                   | 5) $\left  \frac{z'}{z} \right  = \frac{ z' }{ z }, \quad  z  \neq 0$ |

### 2.6.2. Forma trigonometrică a numerelor complexe

$z = r(\cos u + i \sin u)$ , unde  $r = |z|$ , iar unghiul  $u \in [0, 2\pi)$  este soluția ecuațiilor trigonometrice  $r \cos u = a$  și  $r \sin u = b$ .

*Exemplu:* Dacă  $z = -1 - i$ , atunci  $|z| = \sqrt{2}$ ,  $u = \frac{5\pi}{4}$  și  $z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ .

### 2.6.3. Formula lui Moivre

$$\forall u \in \mathbb{R} \text{ și } \forall n \in \mathbb{N}, (\cos u + i \sin u)^n = \cos(nu) + i \sin(nu).$$

Consecințe ale formulei lui Moivre

$$\cos nu = \cos^n u - C_n^2 \cos^{n-2} u \sin^2 u + C_n^4 \cos^{n-4} u \sin^4 u - \dots$$

$$\sin nu = C_n^1 \cos^{n-1} u \sin u - C_n^3 \cos^{n-3} u \sin^3 u + \dots$$

$$\operatorname{tg} nu = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} u - C_n^3 \operatorname{tg}^3 u + C_n^5 \operatorname{tg}^5 u - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 u + C_n^4 \operatorname{tg}^4 u - \dots}$$

### 2.6.4. Extragerea rădăcinii de ordinul $n$ dintr-un număr complex $z = r(\cos u + i \sin u)$

$$(\sqrt[n]{z})_k = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{u + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{u + 2k\pi}{n} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$(\sqrt[n]{1})_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1^*$$

$$(\sqrt[n]{-1})_k = \cos \frac{2k+1}{n} \pi + i \sin \frac{2k+1}{n} \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1^{**}$$

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right)$$

Exemple. 1) Pentru  $n=3$  și  $z=1$  ( $r=1$  și  $u=0$ ) rădăcinile cubice complexe ale unității sînt  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = j$ ,  $\varepsilon_2 = j^2$ , unde  $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  și  $j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ . Afizele  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  și  $\varepsilon_2$  corespund virfurilor unui triunghi echilateral, înscris într-un cerc de rază 1.

2) Pentru  $n=2$  și  $z=i$  ( $r=1$ ,  $u=\frac{\pi}{2}$ ) avem  $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ,  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ .

### 2.6.5. Forma exponențială a numerelor complexe

$$z = re^{iu}.$$

Proprietăți:

$$1) \bar{z} = re^{-iu};$$

$$2) zz' = rr' e^{i(u+u')};$$

\* Pentru simplitate, în continuare, notăm  $(\sqrt[n]{1})_k = \varepsilon_k$ :

\*\* Pentru același argument, notăm  $(\sqrt[n]{-1})_k = \omega_k$ .

$$3) \frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} e^{i(u-u')};$$

$$4) z^n = r^n e^{inu};$$

$$5) (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(u+2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Formulele lui Euler.

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u; \quad e^{-iu} = \cos u - i \sin u.$$

## 2.6.6. Ecuația binomă

$$x^n - A = 0, \quad A \in \mathbb{C}, \quad A = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$x_k = |A|^{1/n} \omega_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad A < 0;$$

$$x_k = A^{1/n} \varepsilon_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad A \in \mathbb{R}, \quad A > 0;$$

$$x_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad A \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R};$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația  $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = i$ . Deoarece  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ ,

avem  $\frac{1+iz}{1-iz} = \cos \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n} \right)$ . Rezolvând această ultimă ecuație în raport cu  $z$ , găsim  $z_k = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n} \right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ .

## 2.7. Ecuații și inecuații de gradul al II-lea

### 2.7.1. Ecuații de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Formule de rezolvare.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad \Delta = b^2 - 4ac;$$

sau

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad b = 2b'; \quad \Delta' = b'^2 - ac.$$

Formulele lui François Viète.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Discuția naturii și semnului rădăcinilor în funcție de semnele lui  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,  $P = x_1 x_2$  și  $S = x_1 + x_2$

$\Delta$	$P$	$S$	Natura și semnul rădăcinilor
$\Delta < 0$	—	—	Rădăcini complexe
$\Delta = 0$	—	—	Rădăcini reale și egale
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S > 0$	Rădăcini reale pozitive
	$P > 0$	$S < 0$	Rădăcini reale negative
	$P < 0$	$S > 0$	Rădăcini reale și de semne contrare; cea pozitivă este mai mare decât valoarea absolută a celei negative
	$P < 0$	$S < 0$	Rădăcini reale și de semne contrare. Cea negativă este mai mare în valoarea absolută.

Rădăcinile ecuației  $x^2 + px + q = 0$ ,  $p, q \in \mathbf{R}$ , exprimate cu ajutorul funcțiilor trigonometrice:

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right)$$

$\Delta$	$q$	Relația de definire a lui $\varphi$	$x_1$	$x_2$
$\Delta > 0$	$q < 0$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{ p }$	$\varepsilon \sqrt{-q} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	$-\varepsilon \sqrt{-q} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$
$\Delta > 0$	$q > 0$	$\sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{ p }$	$-\varepsilon \sqrt{q} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	$-\varepsilon \sqrt{q} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$
$\Delta < 0$	$q > 0$	$\cos \varphi = \frac{ p }{2\sqrt{q}}$	$\sqrt{q} \cdot e^{i\varphi}$	$\sqrt{q} \cdot e^{-i\varphi}$

$\varepsilon = \operatorname{signum} p$

Formule utile în studiul ecuației de gradul al II-lea:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = S^4 - 4S^2 P + 2P^2$$

Semnul funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$

$\Delta > 0$ :  $a \neq 0$ ,  $x_1 < x_2$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f(x)$	Semnul lui $a$	0	Semn contrar lui $a$	0	Semnul lui $a$



$$\Delta = 0:$$

$x$	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
$f(x)$	Semnului lui $a$	0	Semnului lui $a$

$$\Delta < 0:$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Semnului lui $a$	

Graficul funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , este o parabolă.

Descompunerea trinomului  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $x_1$  și  $x_2$  fiind rădăcinile trinomului

1.  $\Delta > 0$ ,  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

2.  $\Delta = 0$ ;  $f(x) = a(x - x_1)^2$ .

3.  $\Delta < 0$ ,  $f(x)$  este ireductibil (indecompozabil) pe  $\mathbf{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Construirea unei ecuații de gradul al II-lea când se cunosc suma și produsul rădăcinilor ei:

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ cu } S = x_1 + x_2 \text{ și } P = x_1x_2.$$

Condiții necesare și suficiente pentru ca numerele reale date  $\alpha$  și  $\beta$  să fie în anumite relații cu rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$  ale ecuației de gradul al doilea:

$$f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0$$

respectiv, pentru ca  $f(x)$  să păstreze un semn constant  $\forall x, x \in \mathbf{R}$ .

No. crt.	Relații între $x_1, x_2, \alpha$ și $\beta$	Condiții necesare și suficiente
1	$\alpha < x_1 < \beta < x_2$ sau $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$	1°. $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ .
2	$\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta$	1°. $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ . 2°. $af(\alpha) > 0$ . 3°. $af(\beta) > 0$ . 4°. $\alpha < -\frac{b}{2a}$ . 5°. $\beta > -\frac{b}{2a}$ .

Nr. crt.	Relații între $x_1$ , $x_2$ , $\alpha$ și $\beta$	Condiții necesare și suficiente
3	$x_1 < \alpha < \beta < x_2$	$1^\circ. af(\alpha) < 0.$ $2^\circ. af(\beta) < 0$ , ceea ce atrage după sine $\Delta > 0$ sau $1'^\circ. f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0.$ $2'^\circ. af(\alpha) + af(\beta) < 0.$
4	$x_1 < \alpha < x_2$	$af(\alpha) < 0.$
5	$\alpha < x_1 \leq x_2$	$1^\circ. \Delta \geq 0.$ $2^\circ. af(\alpha) > 0.$ $3^\circ. \alpha < -\frac{b}{2a}.$
6	$x_1 \leq x_2 < \alpha$	$1^\circ. \Delta \geq 0.$ $2^\circ. af(\alpha) > 0.$ $3^\circ. \frac{-b}{2a} < \alpha.$
7	$f(x) \geq 0, \forall x, x \in \mathbf{R}$	$1^\circ. \Delta \leq 0.$ $2^\circ. a > 0.$
8	$f(x) \leq 0, \forall x, x \in \mathbf{R}$	$1^\circ. \Delta \leq 0.$ $2^\circ. a < 0.$

**Teoremă.** Ecuațiile  $ax^2 + bx + c = 0$  și  $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ,  $a, b, c, a', b', c' \in \mathbf{R}$ ,  $aa' \neq 0$ , au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0.$$

*Teoremă.* Două ecuații de gradul al doilea  $ax^2 + bx + c = 0$  și  $a'x^2 + b'x + c' = 0$  au aceleași rădăcini dacă și numai dacă au coeficienții proporționali:  $a = ma'$ ,  $b = mb'$ ,  $c = mc'$ ,  $m \in \mathbf{R}^*$

*Observație.* Rezolvarea ecuației bipătrate  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , prin substituția  $x^n = y$ , se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea în  $y$ , anume  $ay^2 + by + c = 0$ , și la rezolvarea a două ecuații binome de forma  $x^n = y_1$ ,  $x^n = y_2$ .

### 2.7.2. Inecuații fundamentale, de gradul al II-lea

1)  $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $S =$  mulțimea soluțiilor:

$\Delta$	$a$	$S$
$\Delta > 0$	$a > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
$\Delta > 0$	$a < 0$	$(x_1, x_2)$
$\Delta = 0$	$a > 0$	$\mathbf{R} \setminus \{x\}$
$\Delta = 0$	$a < 0$	$\emptyset$
$\Delta < 0$	$a > 0$	$\mathbf{R}$
$\Delta < 0$	$a < 0$	$\emptyset$

2)  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $S =$  mulțimea soluțiilor:

$\Delta$	$a$	$S$
$\Delta > 0$	$a > 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
$\Delta > 0$	$a < 0$	$[x_1, x_2]$
$\Delta = 0$	$a > 0$	$\mathbf{R}$
$\Delta = 0$	$a < 0$	$\{x\}$
$\Delta < 0$	$a > 0$	$\mathbf{R}$
$\Delta < 0$	$a < 0$	$\emptyset$

Inecuațiile  $ax^2 + bx + c < 0$  și  $ax^2 + bx + c \leq 0$  se reduc la cazurile precedente (prin înmulțirea cu  $-1$  și schimbarea sensului acestor inegalități)

## 2.8. Ecuații algebrice de gradul III, IV și V

### 2.8.1. Rezolvarea ecuației de gradul al treilea

**Metoda lui Cardan.** Ecuația  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ , prin substituția  $x = y - \frac{b}{3a}$ , capătă forma canonică

$$y^3 + py + q = 0, \text{ cu } p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \quad (1)$$

Dacă notăm

$$P = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \quad \text{și} \quad Q = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

atunci rădăcinile ecuației (1) sînt

$$y_1 = P + Q.$$

$$y_2 = -\frac{P+Q}{2} + i \frac{P-Q}{2} \cdot \sqrt{3},$$

$$y_3 = -\frac{P+Q}{2} - i \frac{P-Q}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

*Exemplu.*  $y^3 - 6y + 6 = 0$ ;  $p = -6$ ,  $q = 6$ ;  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -8 + 9 = 1$ ;

$$P = \sqrt[3]{-3+1} = -\sqrt[3]{2}; \quad Q = -\sqrt[3]{4}.$$

Deci

$$y_1 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4};$$

$$y_2 = +\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2});$$

$$y_3 = +\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}).$$

*Observație.* Numărul  $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$  se numește discriminantul ecuației (1).

Dacă  $D < 0$ , atunci ecuația (1) are toate rădăcinile reale și distincte.

Dacă  $D = 0$ , atunci ecuația (1) are toate rădăcinile reale, dintre care două confundate (egale).

Dacă  $D > 0$ , atunci ecuația (1) are o singură rădăcină reală și două complexe conjugate.

În cazul  $D < 0$ , cele trei rădăcini reale au forme complexe și este mai indicat să se folosească alte metode de rezolvare, de pildă cea care utilizează funcțiile trigonometrice.

*Metoda de rezolvare a ecuației  $y^3 + py + q = 0$ , bazată pe folosirea funcțiilor trigonometrice.*

**Cazul 1.**  $D < 0$  ( $p < 0$ ). Dacă  $\alpha$  este definit de  $\cos \alpha = \frac{-q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ ,

atunci

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}; \quad y_{2,3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right).$$

*Exemplu.*  $y^3 - 24y - 32 = 0$ ;  $p = -24$ ;  $q = -32$ ,  $D = (-8)^3 + 4(-16)^2 = 256 - 512 = -256$ ;  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  și

$$y_1 = 4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12}; \quad y_2 = -4\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12}; \quad y_3 = -4.$$

**Cazul 2.**  $D \geq 0$  ( $p < 0$ ). Dacă  $\theta$  și  $\varphi$  sînt definite de

$$\sin \theta = \frac{2}{q} \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

atunci

$$y_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\varphi}; \quad y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1 \pm i\sqrt{3} \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

**Cazul 3.**  $D > 0$  ( $p > 0$ ). Dacă  $\theta$  și  $\varphi$  sînt definite de

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{q} \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}, \quad \text{atunci}$$

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos 2\varphi; \quad y_{2,3} = \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{\cos 2\varphi \pm i\sqrt{3}}{\sin 2\varphi}.$$

**Cazul 4.**  $D = 0$  ( $p < 0$ ).

$$y_1 = \mp 2\sqrt{-\frac{p}{3}}; \quad y_2 = y_3 = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

## 2.8.2. Ecuația reciprocă de gradul al treilea

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R} \quad a \neq 0.$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a ecuației

$$(x \pm 1)[ax^2 + (b \mp a)x + a] = 0.$$

## 2.8.3. Rezolvarea ecuației de gradul al patrulea

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

Ecuația se poate scrie:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d,$$

sau, prin adunarea la ambii membri a cantității  $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$ ,

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \frac{y^2}{4} - d.$$

Alegem pe  $y$  astfel ca și partea a doua să fie un pătrat perfect. Notînd cu  $A^2 = \frac{a^2}{4} - b + y$ ,  $B^2 = \frac{y^2}{4} - d$ ,  $2AB = \frac{ay}{2} - c$  această condiție se scrie  $4 \cdot A^2 B^2 = (2AB)^2$ , ceea ce ne conduce la ecuația rezolvantă

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (d(a^2 - 4b) + c^2) = 0.$$

Dacă  $y_0$  este o rădăcină a acestei ecuații, atunci rezolvarea ecuației date se reduce la aceea a ecuațiilor

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = Ax + B \quad \text{și} \quad x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -Ax - B.$$

*Exemplu.* Să se rezolve ecuația  $x^4 + 3x^3 - 5x - 3 = 0$ . Ecuația rezolvantă (avînd  $a = 3$ ,  $b = 0$ ,  $c = -5$ ,  $d = -3$ ) este  $y^3 - 3y + 2 = 0$ . Fie  $y_0 = -2$ . Atunci  $A^2 = \frac{1}{4}$ ,  $B^2 = 4$ ,  $2AB = 2$ . Deci  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = 2$ ; acum avem de rezolvat ecuațiile  $x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = \frac{x}{2} + 2$  și  $x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = -\frac{x}{2} - 2$  care ne dau

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_3 = x_4 = -1$$

### 2.8.4. Ecuația reciprocă de gradul al patrulea

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a unei ecuații de gradul al doilea, prin substituția  $y = x + \frac{1}{x}$ :

$$a \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \pm b \left( x + \frac{1}{x} \right) + c = 0 \text{ sau } ay^2 \pm by + c - 2a = 0.$$

### 2.8.5. Ecuația bipătrată

$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$  Cu  $x^2 = y$ , rezultă ecuația  $ay^2 + by + c = 0$ , deci

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

### 2.8.6. Ecuația reciprocă de gradul al cincilea

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$$

Rezolvarea ei se reduce la rezolvarea ecuației  $x \pm 1 = 0$  și a unei ecuații reciproce de gradul al patrulea.

## 2.9. Logaritmi

*Definiție.* Fie  $a \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $a \neq 1$ , și  $b \in \mathbf{R}_+^*$  două numere reale. Se numește *logaritm* al numărului real strict pozitiv  $b$  exponentul la care trebuie ridicat numărul  $a$ , numit *bază*, pentru a obține numărul  $b$ .

Logaritmul numărului  $b$  în baza  $a$  se notează  $\log_a b$ .

Evident  $b = a^{\log_a b}$ . Pentru  $a = 10$  obținem *logaritmii zecimali*, iar pentru  $a = e$  obținem *logaritmii naturali* sau *neperieni*.

*Proprietăți:*

1)  $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c \quad (b, c > 0).$

2)  $\log_a a = 1.$

3)  $\log_a 1 = 0.$

4)  $\log_a a^c = c; \quad \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b; \quad \log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, \quad x \neq 0.$

5)  $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b \quad (b > 0, \quad m \in \mathbf{N}, \quad m \geq 2)$

6)  $\log_a b \cdot \log_b a = 1.$

7) (Formula de schimbare a bazei logaritmului)  $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$

8)  $x > 0$  și  $y > 0 \Rightarrow \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$

9)  $x > 0$  și  $y > 0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \quad \operatorname{colg}_a x = -\log_a x$

$$10) a > 1 \text{ și } x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x < 0; a > 1 \text{ și } x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0.$$

$$11) 0 < a < 1 \text{ și } x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x > 0; 0 < a < 1 \text{ și } x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0.$$

$$12) a > 1 \text{ și } 0 < x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y; 0 < a < 1 \text{ și } 0 < x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y.$$

$$13) x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$$

$$14) x > 0, a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \log_a x = \log_{a^n} x^n$$

$$15) x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$$

**Operații cu logaritmi zecimali.** 1°. *Suma a doi logaritmi:* se adună separat caracteristicile (se adună algebric, întrucît există caracteristici pozitive și caracteristici negative) și separat mantisele (care sînt întotdeauna pozitive, afară de cazul în care întregul logaritm este negativ); apoi cele două rezultate se adună algebric.

2°. *Scăderea a doi logaritmi:* se adună descăzutul cu cologaritmul scăzătorului.

3°. *Înmulțirea unui logaritm cu un număr întreg:* cînd caracteristica este pozitivă, înmulțirea se face în modul obișnuit; cînd caracteristica este negativă se înmulțește separat mantisa și separat caracteristica și se adună algebric rezultatele.

4°. *Împărțirea unui logaritm printr-un număr întreg.* În cazul cînd caracteristica este pozitivă, împărțirea se face obișnuit. În cazul în care este negativă, se împarte separat mantisa și separat caracteristica; dacă nu se împarte exact caracteristica prin numărul dat, atunci se adaugă caracteristicii atîtea unități negative cîte sînt necesare pentru a avea un număr divizibil prin împărțitorul respectiv și, pentru a nu se modifica rezultatul, se adaugă și mantisei tot atîtea unități, dar pozitive.

## 2.9.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale

1)  $\log_a x = b, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$ . Soluția:  $x = a^b$ .

2)  $\log_a x > b, b \in \mathbb{R}$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

$a$	$S$
$a > 1$	$(a^b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$(0, a^b)$

3)  $\log_a x < b, b \in \mathbb{R}$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

$a$	$S$
$a > 1$	$(0, a^b)$
$0 < a < 1$	$(a^b, +\infty)$



## 2.9.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale

- 1)  $a^x = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ . Soluția  $x = \log_a b \in \mathbf{R}$ .
- 2)  $a^x = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \leq 0$ , nu are nici o soluție reală.
- 3)  $a^x > b$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

$a$	$b$	$S$
$a > 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$a > 0$ $a \neq 1$	$b < 0$	$\mathbf{R}$

- 4)  $a^x < b$ . Fie  $S$  mulțimea soluțiilor. Avem:

$a$	$b$	$S$
$a > 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$a > 0$ $a \neq 1$	$b \leq 0$	$\emptyset$

## 2.10. Metoda inducției matematice

### 2.10.1. Axioma de recurență a lui Peano

Fie  $A$  o parte a lui  $\mathbf{N}$  astfel că:

1.  $0 \in A$ ;      2.  $(\forall n \in \mathbf{N}), \quad n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$ . Atunci rezultă  $A = \mathbf{N}$ .

### 2.10.2. Metoda inducției matematice

Fie  $P(n)$  o propoziție care depinde de numărul natural  $n$ . Dacă avem:

1.  $P(0)$  adevărată;
2.  $\forall n \in \mathbf{N}, P(n) \text{ adevărată} \Rightarrow P(n + 1) \text{ adevărată}$ , atunci  $P(n)$  este adevărată pentru orice număr natural  $n$ .

În demonstrație prin metoda inducției matematice (recurență) poate apărea în loc de 0, un număr natural  $n_0$ , dacă în propoziția  $P(n)$  pe care vrem să o demonstrăm am considerat  $n \geq n_0$ .

### 2.10.3. Variantă a metodei inducției matematice.

Fie  $P(n)$  o propoziție care, depinde de numărul natural  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ . Dacă avem:

1.  $P(n_0)$  adevărată;

2.  $(\forall m \in \mathbb{N}, n_0 \leq m < k) P(m) \text{ adevărată} \Rightarrow P(k) \text{ adevărată}$ , atunci  $P(n)$  este adevărată pentru orice număr natural  $n \geq n_0$ .

*Exemplu.* Media aritmetică a  $n$  numere pozitive nu este mai mică decât media lor geometrică, adică

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  și numerele strict pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , avem

$$P(n): \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

egalitatea avind loc atunci și numai atunci când  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Redăm demonstrația lui *Cauchy*:

1. *Etașa de verificare*: în cazul nostru  $n_0 = 2$ ; pentru  $n = 2$  inegalitatea este adevărată, întrucât

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{1}{2} (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0, \text{ evident; deci}$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}. \quad (2)$$

Se constată imediat că (2) se transformă în egalitate dacă și numai dacă  $a_1 = a_2$ .

2) *Etașa de demonstrație*. Admitem că relația (1) este adevărată pentru  $n = 2^k > 2$  și să demonstrăm că ea este adevărată și pentru  $2n = 2^{k+1}$ , adică

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}}. \quad (3)$$

În adevăr, avem

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n-1} + a_{2n}}{2n} = \\ & = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \dots + \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}}{n} \geq \\ & \geq \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \dots \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}} \geq \\ & \geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \dots \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}}. \end{aligned}$$

Cum inegalitatea noastră este adevărată pentru 2, urmează că ea este adevărată pentru  $2^2, 2^3, \dots, 2^k, \dots, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Pentru a arăta că (1) are loc pentru orice  $n$ , rămâne să arătăm că (1) are loc pentru orice  $p$  care nu e putere a lui 2,  $p < 2^k$ . În acest scop folosim următorul rezultat:

„Dacă  $p$  nu este o putere a lui 2 și este mai mic decât  $2^k$ , atunci  $\exists m \in \mathbb{N}$  astfel încât  $p + m = 2^k$ ”. De aceea vom scrie

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+m}}{p + m} \geq \sqrt[p+m]{a_1 a_2 \dots a_{p+m}}$$

$$\text{Alegem } a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = a_{p+m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p}$$

Aceasta ne permite să scriem

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p + m \frac{a_1 + \dots + a_p}{p}}{p + m} \geq \sqrt[p+m]{a_1 a_2 \dots a_p \left( \frac{a_1 + \dots + a_p}{p} \right)^m}$$

sau

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p} \geq \sqrt[p+m]{a_1 a_2 \dots a_p \left( \frac{a_1 + \dots + a_p}{p} \right)^m}$$

sau

$$\left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p} \right)^{p+m} \geq a_1 a_2 \dots a_p \left( \frac{a_1 + \dots + a_p}{p} \right)^m$$

sau

$$\left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p} \right)^p \geq a_1 a_2 \dots a_p$$

sau

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{p} \geq \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_p}, \quad \forall p < 2^k. \quad (4)$$

Deci (1) are loc pentru orice  $n$ .

Mai rămâne de arătat că egalitatea în (1) are loc dacă și numai dacă  $a_1 = \dots = a_n$ .

Evident  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  implică egalitate în (1). Pentru a arăta că  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$  ne conduce la  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  este suficient a arăta\*

că  $a_1 \neq a_2$  implică

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

\* Adică noi arătăm, de fapt, contrara reciprocei.

Fie deci  $a_1 \neq a_2$ , situație în care avem  $\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$ .

De aceea putem relua (1) sub forma

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq$$

$$> \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \dots a_n} > \sqrt[n]{(\sqrt{a_1 a_2})^2 a_3 \dots a_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

Deci  $a_1 \neq a_2$  ne conduce la  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ , adică egalitate în (1) are loc dacă și numai dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

## 2.11. Progresii aritmetice

*Definiție.* Se numește *progresie aritmetică* un șir de numere  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  în care fiecare termen, începând cu  $a_2$ , se obține din cel precedent prin adăugarea unui număr constant numit *rația progresiei*.

Se notează  $\div a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Dacă  $a_1$  este primul termen,  $a_n$  cel de al  $n$ -lea termen (*termenul general sau termenul de rang  $n$* ),  $r$  rația,  $n$  numărul termenilor și  $S_n$  suma celor  $n$  termeni, atunci avem:

$$a_n = a_{n-1} + r, \quad n \geq 2 \quad (\text{prin definiție})$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad n \geq 2 \quad (a_n \text{ în funcție de } a_1, r \text{ și } n) \quad (1)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ sau}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n \quad (2)$$

*Natura progresiei.* Progresia este crescătoare dacă  $r > 0$ , descrescătoare dacă  $r < 0$  și toți termenii sînt egali, dacă  $r = 0$ .

*Termeni echidistanți de extremi.* Intr-o progresie aritmetică suma termenilor echidistanți de extremi este egală cu suma termenilor extremi:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

*Observație.* Dacă numărul termenilor este impar ( $n = 2m + 1$ ), atunci există un termen în mijloc,  $a_{m+1}$ , astfel încît

$$2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$$

*Condiția necesară și suficientă pentru ca trei numere  $a, b, c$ , luate în această ordine, să formeze o progresie aritmetică este să avem  $2b = a + c$ .*

*Inserarea mediilor aritmetice*  $a'_1, \dots, a'_m$  între doi termeni consecutivi  $a_j, a_{j+1}$  ai unei progresii aritmetice  $a_1, \dots, a_n$  de rație  $r$  se reduce la calcularea rației  $r'$  a progresiei aritmetice  $a_j, a'_1, \dots, a'_m, a_{j+1}$  de  $m + 2$  termeni. Rezultă

$$r' = r/(m + 1) \text{ sau } r' = \frac{a_{j+1} - a_j}{m + 1}.$$

*Autent*

*Exemplu.* Să se însereze 5 medii aritmetice între  $-3$  și  $12$ .

*Soluție.* Fie  $r'$  rația progresiei căutate. Numărul termenilor fiind  $2 + 5 = 7$ , avem

$$r' = \frac{12 - (-3)}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Rezultă progresia căutată

$$\div -3; -\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 7, \frac{19}{2}, 12.$$

### 2.11.1. Reprezentarea unei progresii aritmetice cu $n$ termeni

1) Dacă numărul termenilor este impar ( $n = 2m + 1$ ),  $a$  fiind termenul din mijloc și  $r$  rația, atunci progresia are forma

$$a - mr, \dots, a - r, a, a + r, \dots, a + mr.$$

2) Dacă numărul termenilor este par ( $n = 2m$ ), progresia are forma:  $a - (2m + 1)r', \dots, a - 3r', a - r', a + r', a + 3r', \dots, a + (2m + 1)r'$ , cu rația  $r = 2r'$ .

*Caracterizarea și determinarea unei progresii aritmetice.* O progresie aritmetică este complet caracterizată dacă cunoaștem pe  $a_1, r, n, a_n$  și  $S_n$ . Aceste cinci numere sînt legate prin două relații: relațiile (1) și (2). Rezultă că pentru a determina complet o progresie aritmetică nouă trebuie să ni se indice 3 din cele 5 numere menționate (sau trei relații care conține aceste 5 numere), astfel încît împreună cu (1) și (2) să formeze un sistem compatibil din care să aflăm pe  $a_1, r, n, a_n$  și  $S_n$ .

*Exemplu.* O progresie aritmetică are suma termenilor săi egală cu 222,  $a_3 + a_7 = 28$ ,  $a_4 + a_8 = 34$ .

Se cere numărul termenilor săi, primul termen și rația.

*Rezolvare.* Pentru această progresie avem trei relații date prin enunț, plus cele două din cadrul teoriei, deci cinci ecuații cu cinci necunoscute și problema are sens.

Din  $a_3 + (a_3 + 4r) = 28$  și  $(a_3 + r) + (a_3 + 5r) = 34$  găsim  $a_3 = 8$  și  $r = 3$ . Din  $a_3 = a_1 + 2r$ , deducem  $a_1 = 2$ . Din  $2S_n = (2a_1 + (n - 1)r)n$ , găsim ecuația pentru  $n$ ,  $3n^2 + nt - 444 = 0$ , cu rădăcina naturală  $n = 12$ . În sfîrșit  $a_{12} = 35$ .

Deci pentru această progresie avem

$$a_1 = 2, r = 3, n = 12, a_{12} = 35, S_{12} = 222.$$

### 2.11.2. Progresii armonice (W. Oughtred)

*Definiție.* Se numește progresie armonică șirul de numere obținut din răsturnarea termenilor unei progresii aritmetice.

Se notează  $\overline{\overline{h_1, h_2, \dots, h_n, \dots}}$

*Exemplu.*  $\overline{\overline{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots}}$

*Proprietăți.* Fiecare termen al progresiei, în afară de primul ( $h_1$ ) și ultimul ( $h_n$ ), este media armonică a termenilor adiacenți  $\left( h_k = \frac{2}{\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_{k+1}}} \right)$ .

*Formula termenului general:*  $h_n = \frac{a_1 r}{(n-1)a_1 + r}$ , cu  $a_1$  și  $r$  primul termen și rația progresiei aritmetice din care provine progresia armonică respectivă.

## 2.12. Progresii geometrice

*Definiție.* Se numește *progresie geometrică* un șir de numere  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  în care fiecare termen, începînd cu  $a_2$ , se deduce din cel precedent prin înmulțirea acestuia cu un același număr  $q$  ( $q \neq 0$ ) numit *rație*.

Se notează  $\div a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Dacă  $a_1$  este primul termen,  $a_n$  cel de al  $n$ -lea termen (*termenul general* sau *termenul de rang,  $n$* ),  $q$  rația,  $n$  numărul termenilor și  $S_n$  suma celor  $n$  termeni, avem:

$$a_n = q \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 2 \quad (\text{prin definiție}),$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 2 \quad (a_n \text{ în funcție de } a_1, q \text{ și } n)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{sau } S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

*Natura progresiei:*

$$q > 1 \begin{cases} a_1 > 0, \text{ progresia este crescătoare;} \\ a_1 < 0, \text{ progresia este descrescătoare;} \end{cases}$$

$$0 < q < 1 \begin{cases} a_1 > 0, \text{ progresia este descrescătoare;} \\ a_1 < 0, \text{ progresia este crescătoare;} \end{cases}$$

$q < 0$  progresia este alternată (orice doi termeni consecutivi sînt de semn contrare);

$q = 0$ , primul termen este  $a_1$ , ceilalți sînt nuli;

$q = 1$ , toți termenii progresiei sînt egali cu primul termen  $a_1$ .

*Termeni echidistanți de extremi.* Într-o progresie geometrică, produsul a doi termeni echidistanți de extremi este egal cu produsul termenilor extremi:

$$a_p \cdot a_{n-p+1} = a_1 \cdot a_n.$$

*Observație.* Dacă numărul termenilor este impar ( $n = 2m + 1$ ), atunci există un termen la mijloc,  $a_{m+1}$ , astfel încît

$$a_{m+1}^2 = a_1 \cdot a_{2m+1}$$

*Condiția necesară și suficientă cu trei numere  $a, b, c$ , luate în această ordine, să formeze o progresie geometrică este să avem  $b^2 = ac$ .*

Inserarea mediilor geometrice  $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$  între doi termeni consecutivi  $a_j, a_{j+1}$  ai unei progresii geometrice  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de rație  $q$  se reduce la calcularea rației  $q'$  a progresiei geometrice  $a_j, a'_1, \dots, a'_m, a_{j+1}$  cu  $m+2$  termeni.

Această rație este  $q' = {}^{m+1}\sqrt{q}$  sau  $q' = \sqrt[m+1]{\frac{a_{j+1}}{a_j}}$ .

Dacă  $m$  este par avem o singură soluție reală:  $q' = \sqrt[m+1]{\frac{a_{j+1}}{a_j}}$ .

Dacă  $m$  este impar avem:

$$\begin{cases} \text{în cazul } \frac{a_{j+1}}{a_j} < 0, \text{ nici o soluție} \\ \text{în cazul } \frac{a_{j+1}}{a_j} > 0, \text{ două soluții reale:} \\ q' = \pm \sqrt[m+1]{\frac{a_{j+1}}{a_j}}. \end{cases}$$

*Exemplu.* Să se insereze cinci medii geometrice între  $\frac{1}{2}$  și 4.

*Soluție.* Avem 7 termeni, deci  $q' = \pm \sqrt[6]{\frac{4}{\frac{1}{2}}} = \pm \sqrt[6]{2^3} = \pm \sqrt{2}$ .

Rezultă două progresii geometrice:

$$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4,$$

respectiv

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4.$$

### 2.12.1. Reprezentarea unei progresii geometrice cu $n$ termeni

Dacă numărul termenilor este impar ( $n = 2m + 1$ ) și  $a$  este termenul din mijloc, progresia o putem scrie astfel:

$$\frac{a}{q^m}, \dots, \frac{a}{q}, a, qa, \dots, q^m a.$$

Dacă numărul termenilor este par ( $n = 2m$ ), putem scrie:

$$\frac{a}{q^{2m-1}}, \dots, \frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, qa, q^3 a, \dots, q^{2m-1} a$$

(progresie cu rația  $q^2$ )

sau

$$(-1)^m \frac{a}{q^{2m-1}}, \dots, \frac{-a}{q^3}, \frac{a}{q}, -qa, q^3a, \dots, (-1)^m q^{2m-1}a$$

(progresie cu rația  $-q^2$ ).

Limita sumei  $S_n$ :

Dacă:

$q > 1$ :  $q^n \rightarrow +\infty$  și  $S_n \rightarrow +\infty$ , dacă  $a_1 > 0$ ; respectiv  $S_n \rightarrow -\infty$ ,  
dacă  $a_1 < 0$ ;

$0 < q < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$  și  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$ .

$q < -1$ :  $q^n$  nu are limită și  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  nu există.

$-1 < q < 0$ :  $q^n \rightarrow 0$  și  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$ .

Caracterizarea și determinarea unei progresii geometrice se face la fel ca la progresiile aritmetice.

## 2.13. Analiză combinatorie

### 2.13.1. Permutări

*Definiție.* Se numesc permutări ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele  $n$  elemente ale lui  $A$ .

Numărul permutărilor a  $n$  elemente,  $n \in \mathbb{N}^*$ , este:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!; 0! = 1 \text{ (prin definiție).}$$

*Exemplu.* Numărul permutărilor a trei elemente,  $a, b$  și  $c$  ( $abc, bca, cab, acb, bac, cba$ ) este  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ .

Numărul permutărilor cu repetiție a  $n$  elemente, în care fiecare element se poate repeta pînă la  $n$  ori, este  $\bar{P}_n = n^n$ .

*Exemplu.* Cu elementele  $a, b, c$  putem forma permutările cu repetiție:

$aaa, bbb, ccc, aab, aba, baa, aac, aca, caa$

$abb, bab, bba, cbb, bcb, bbc, cca, cac, acc$

$ccb, cbc, bcc, abc, acb, bac, bca, cab, cba$ ;

$$n = 3; 3^3 = 27 \text{ permutări} = \bar{P}_n.$$

Numărul permutărilor a  $n$  elemente, dintre care  $\alpha_1$  sînt egale între ele,  $\alpha_2$  sînt egale între ele, ...,  $\alpha_r$  sînt egale între ele, este egal cu

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_r!}, \text{ cu } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n.$$



*Exemplu.* Pentru  $n = 3$  și  $\alpha_1 = 2$  (aac, aka, caa) avem

$$\tilde{r} = \frac{3!}{211!} = 3.$$

*Factoriale (proprietăți):*

$$n! = (n-1)!n; \quad n! = (n-2)!(n-1)n; \quad n! = \frac{(n+1)!}{n+1};$$

$$n! = \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}.$$

## 2.13.2. Aranjamente

*Definiție.* Se numesc aranjamente a  $n$  elemente luate câte  $m$  ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente, toate submulțimile ordonate cu câte  $m$  elemente care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ .

Se notează  $A_n^m$ .

Numărul aranjamentelor a  $n$  elemente luate câte  $m$  este

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad n \geq m.$$

*Exemplu.* Numărul aranjamentelor a trei elemente  $a, b, c$  luate câte două (ab, ac, bc, ba, ca, cb) este  $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ .

*Proprietăți.*  $A_n^n = P_n$ .  $A_n^n = \frac{n!}{0!}$  sau  $A_n^n = n!$ ;  $A_n^{n-1} = A_n^n$ ;  $A_n^0 = 1$ .

Numărul aranjamentelor cu repetiție a  $n$  elemente luate câte  $m$  este  $\bar{A}_n^m = n^m$ .

*Exemplu.* Pentru trei elemente  $a, b, c$  aranjamentele lor cu repetiție, de câte două elemente, sînt aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb; deci  $n = 3$  și  $m = 2$ ; obținem  $3^2 = 9$  aranjări cu repetiție.

## 2.13.3. Combinări

*Definiție.* Se numesc combinări a  $n$  elemente luate câte  $m$  ( $m \leq n$ ) ale unei mulțimi  $A$  cu  $n$  elemente toate submulțimile cu câte  $m$  elemente, care se pot forma din cele  $n$  elemente ale mulțimii  $A$ .

Se notează  $C_n^m$  sau  $\binom{n}{m}$ .

Numărul combinărilor a  $n$  elemente luate câte  $m$  este

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{sau} \quad C_n^m = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!}$$

*Exemplu.* Numărul combinărilor a trei elemente luate câte două (ab, ac, bc) este  $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ .

*Proprietăți.*

a)  $C_n^1 = n$ ;  $C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$ .

b)  $C_n^m = C_n^{n-m}$ ;  $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ .

c) Numărul submulțimilor unei mulțimi cu  $n$  elemente este  $2^n$ .

$$d) C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \dots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}.$$

$$e) \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_m!} = C_n^{p_1} \cdot C_{n-p_1}^{p_2} \dots C_{n-(p_1+\dots+p_{m-1})}^{p_m}$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m < n$$

Numărul combinărilor cu repetiție a  $n$  elemente luate câte  $m$  este  $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$ .

*Exemplu.* Cu trei elemente  $a, b$  și  $c$  se pot forma combinările cu repetiție de câte două elemente:  $aa, bb, cc, ab, ac, bc$ . Deci  $n = 3, m = 2$  și  $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_4^2 = 6$  combinări cu repetiție.

## 2.13.4. Binomul lui Newton

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n a^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} \cdot a + C_n^2 x^{n-2} \cdot a^2 - \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + (-1)^n a^n$$

*Proprietăți* ( $0 \leq m \leq n$ ):

1. Termenul de rang  $k+1$  este  $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$  sau

$$T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k.$$

$$2. C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k; \quad C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \cdot C_n^k.$$

$$3. T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} \cdot T_{k+1} \text{ sau } T_{k+2} = -\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} \cdot T_{k+1}.$$

4. Numărul termenilor dezvoltării  $(x \pm a)^n$  este  $n+1$ .

5. Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sînt egali.

*Relații importante.*

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n; \quad C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}; \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

*Dezvoltări particulare uzuale*

$$1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$2) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$3) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$4) (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$$

$$5) (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Cazul general:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = n! \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m = 0 \\ p_1 + \dots + p_m = n}}^n \frac{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \dots a_m^{p_m}}{p_1! p_2! \dots p_m!}$$

## 2.13.5. Suma puterilor asemenea ale primelor $n$ numere naturale

Dacă  $S_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ ,  $p \in \mathbf{N}$ , atunci avem

$$\begin{aligned} S_1 &= n(n+1)/2; & S_5 &= n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12 \\ S_3 &= n(n+1)(2n+1)/6; & S_6 &= n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3- \\ & & & \quad - 6n^2 - n + 1)/42 \\ S_4 &= n^2(n+1)^2/4; & S_7 &= n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2- \\ & & & \quad - 4n+2)/24 \\ S_8 &= n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)/30 \dots \end{aligned}$$

O relație care permite calculul lui  $S_p$ , cind se cunosc  $S_{p-1}$ ,  $S_{p-2}$ , ...,  $S_1$  este

$$(n+1)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \dots + C_{p+1}^p S_1 + n \quad (\text{formula lui Pascal}).$$

## 2.14. Matrice și determinanți

### 2.14.1. Matrice

*Definiție.* Fie  $K$  un corp comutativ. Se numește *matrice* cu  $m$  linii și  $n$  coloane ( $m, n \in \mathbf{N}^*$ ) orice familie  $A$ ,

$$A = (a_{ij}) \quad (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\},$$

de elemente  $a_{ij}$  aparținind corpului  $K$ .

Elementele matricei  $A$  se reprezintă ca un tablou dreptunghiular cu  $m$  linii și  $n$  coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Primul indice marchează numărul liniei, iar al doilea indice marchează numărul coloanei.

Uneori se notează cu paranteze cu cirlige [...] sau cu simbolul  $|| \dots ||$ .

Pentru  $K = \mathbf{R}$  obținem o matrice reală, iar pentru  $K = \mathbf{C}$  obținem o matrice complexă.

Mulțimea tuturor matricelor cu elemente din  $K$ , avînd  $m$  linii și  $n$  coloane, numite de tipul  $(m, n)$ , se notează cu  $M_{m,n}(K)$  sau  $M_{m,n}$ .

În  $M_{m,n}$  se definește matricea de efect nul față de adunarea matricelor care are toate elementele egale cu  $O$  și care se numește *matrice nulă*:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*Matricea opusă matricei  $A$ .* Fie  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ ; matricea  $-A$ ,

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix},$$

se numește *opusă matricei  $A$* .

*Alte matrice:*

a) *matricea linie*  $(1, n)$   $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ ;

b) *matricea coloană*  $(m, 1)$   $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ ;

c) *Matrice pătratică.* Matricea  $A$  pentru care  $m = n$  se numește *matrice pătratică*. Mulțimea acestor matrice se notează cu  $M_n(K)$  sau  $M_n$ .

d) *matricea diagonală:*  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ;

e) *matricea scalară:*  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$ ;

f) *matricea unitate, notată cu  $E$ :*  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

*Egalitatea a două matrice.* Două matrice  $A = (a_{ij})$  și  $B = (b_{ij})$  din  $M_{m,n}(K)$  sînt egale dacă și numai dacă  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  =  $I \times J$ .

*Adunarea matricelor.* Fie  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$ ; matricea  $C = (c_{ij}) \in M_{m,n}$  se numește *suma matricelor  $A$  și  $B$*  și se scrie  $C = A + B$ , dacă  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in I \times J$ .

*Exemplu.*  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & -1 + 2 \\ 1 + 2 & 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Proprietățile adunării matricelor*

- $\forall A, B, C \in M_{m,n}$  avem
- 1)  $A + B = B + A$
  - 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - 3)  $A + O = O + A = A$
  - 4)  $A + (-A) = (-A) + A = O$

Deci  $(M_{m,n}, +)$  este un grup comutativ (abelian).

Fie  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$ , matricea  $D = (d_{ij}) \in M_{m,n}$  se numește *diferența matricelor A și B* și se scrie  $D = A + (-B) = A - B$ , dacă  $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \forall (i, j) \in I \times J$ .

*Înmulțirea matricelor cu un scalar.* Fie  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$  și  $\lambda \in K$ ; matricea  $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$  se numește *produsul matricii<sup>1</sup> A cu  $\lambda$* ,  $B = \lambda A$ , dacă  $b_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall (i, j) \in I \times J$ .

*Exemplu.*  $3 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Proprietățile înmulțirii matricelor cu scalari:*

$\forall A, B \in M_{m,n}$  și  $\lambda, \mu \in K$ , avem

- 1)  $1 \cdot A = A$
- 2)  $\lambda A = A\lambda$
- 3)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 4)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 5)  $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$

*Înmulțirea matricelor.* Fie  $A = (a_{ik}) \in M_{m,n}$  și  $B = (b_{kj}) \in M_{n,p}$ ; matricea  $C = (c_{ij}) \in M_{m,p}$  se numește *produsul matricelor A și B*,  $C = AB$ , dacă

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \forall (i, j) \in I \times J.$$

*Exemplu.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Proprietățile înmulțirii matricelor.*

- 1)  $AE = EA = A$
- 2)  $AO = OA = O$
- 3)  $(AB)C = A(BC)$
- 4)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 5)  $(A + B)C = AC + BC$
- 6)  $C(A + B) = CA + CB$

<sup>1</sup>) Dacă numărul coloanelor matricii A nu este egal cu numărul liniilor matricii B, atunci înmulțirea celor două matrici nu este posibilă.

Matricea transpusă a unei matrice:

Fie  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ . Matricea  ${}^tA$  se numește transpusa matricei  $A$ , dacă  ${}^tA = (a_{ji})$ ,  $\forall (i, j) \in I \times J$  sau

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transpusa matricei  $A$  este matricea obținută din  $A$  prin schimbarea liniilor în coloane și a coloanelor în linii.

Proprietăți.

- 1)  ${}^t({}^tA) = A$ .
- 2)  ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$ .
- 3)  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ .
- 4)  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ .

Exemplu.

Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ , atunci  ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Matricea adjuncută a unei matrice

Se numește adjuncută matricei  $A = (a_{ij}) \in M_n$  și se notează cu  $A^*$  matricea

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

unde  $A_{ij}$  este complementul algebric al lui  $a_{ji}$ .

Clase speciale de matrice pătratică:

- 1) O matrice  $A = (a_{ij})$  se numește *simetrică*, dacă și numai dacă  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall (i, j) \in I \times J$ , adică  $A = {}^tA$ .
- 2) O matrice  $A = (a_{ij})$  se numește *antisimetrică*, dacă și numai dacă  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $\forall (i, j) \in I \times J$ , adică  $A = -{}^tA$ .
- 3) O matrice  $A$  se numește *ortogonală* dacă și numai dacă  $A {}^tA = E$ , adică  $A^{-1} = {}^tA$ .
- 4) O matrice  $A$  se numește *nedegenerată*, dacă  $\det A \neq 0$ .
- 5) O matrice  $A$  se numește *degenerată*, dacă  $\det A = 0$ .

Matrice inversabile. Fie  $A \in M_n$ ;  $A$  este *inversabilă* dacă există o matrice  $B \in M_n$  astfel încât  $AB = BA = E$ ;  $B$  se notează cu  $A^{-1}$  și se numește *inversa matricei*  $A$ .

*Teoremă.* Matricea  $A \in M_n$  admite o inversă  $A^{-1} \in M_n$  dacă și numai dacă  $\det A \neq 0$ ; în plus  $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$ .

*Exemplu.* Inversa matricii  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  este

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \text{ cu } a^2 + b^2 \neq 0.$$

*Proprietăți.* 1)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ; 2)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ; 3)  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

*Rangul unei matrice*

Fie matricea  $A \in M_{m,n}$ .

*Minorul unei matrice.* Minorul unei matrice de ordinul  $k$  se numește determinantul format din  $k^2$  elemente ( $k$  linii și tot atâtea coloane) ale matricii date (păstrând ordinea elementelor). Matricea  $A$  are rangul  $r$ , dacă  $A$  are un minor nenul de ordinul  $r$ , iar toți minorii lui  $A$  de ordin mai mare ca  $r$ , dacă există astfel de minori, sint nuli. Se scrie  $\text{rang } A = r$ .

*Forma matriceală a sistemelor afine:*  $AX = B$ ,  $A$ ,  $B$  matrice cunoscute, iar  $X$  matrice necunoscută.

*Exemplu.* Să se afle matricea  $X$  din ecuația  $XA + B = C$ , unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Avem  $\det A = -2$ ;  $A_{11} = 4$ ,  $A_{12} = 2$ ;  $A_{21} = 3$ ;  $A_{22} = 1$ ;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

## 2.15. Determinanți

*Permutare.* O funcție bijectivă  $f$  definită pe  $\{1, 2, \dots, n\}$  cu valori în  $\{1, 2, \dots, n\}$  se numește *permutare* sau *substituție*. Se notează

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_i & \dots & k_j & \dots & k_n \end{pmatrix} \text{ sau } (k_1, k_2, \dots, k_n).$$

*Inversiune.* O pereche ordonată  $(i, j)$ ,  $i < j$ , cu proprietatea  $f(i) > f(j)$  sau  $k_i > k_j$  se numește *inversiune* pentru permutarea  $f$ . Numărul tuturor inversiunilor pe care le prezintă  $f$  se notează cu  $I(k_1, k_2, \dots, k_n)$ .

*Semnul unei permutări.* Numărul  $(-1)^{I(k_1, \dots, k_n)}$  se numește *semnul* permutării  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Permutarea  $f$  se numește *pară* dacă  $(-1)^{I(k_1, \dots, k_n)} = 1$  și *impară* dacă  $(-1)^{I(k_1, \dots, k_n)} = -1$ .

Definiția determinantului de ordinul al doilea. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Numărul obținut prin adunarea următoarelor două numere  $(-1)^{I(1,2)}a_{11}a_{22} + (-1)^{I(2,1)}a_{12}a_{21} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  se numește *determinantul matricei A* sau *determinant de ordinul al 2-lea* și se notează

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Definiția determinantului de ordinul al treilea. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Numărul obținut prin adunarea următoarelor 3! numere

$$\begin{aligned} & (-1)^{I(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{I(2,3,1)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{I(3,1,2)}a_{13}a_{21}a_{32} + \\ & + (-1)^{I(3,2,1)}a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{I(2,1,3)}a_{13}a_{21}a_{33} + (-1)^{I(1,3,2)}a_{11}a_{23}a_{32} = \\ & = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

se numește *determinantul matricei A* sau *determinant de ordinul al III-lea*. Se notează

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

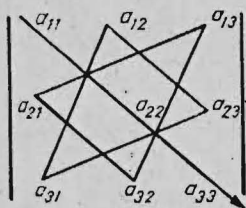


Fig. 2.1

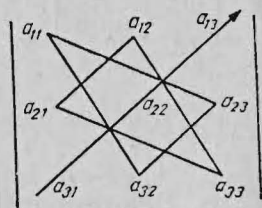


Fig. 2.2

*Regula lui Sarrus.* Pentru calculul determinantului de ordinul al III-lea există următoarea regulă simplă, numită *regula lui Sarrus* sau *regula triunghiurilor*.

Termenii cu semnul + în dezvoltarea determinantului se obțin înmulțind numerele de pe diagonala principală ( $a_{11}a_{22}a_{33}$ ) și cele din vîrfurile „triunghiurilor”, care au bazele paralele cu această diagonală principală ( $a_{12}a_{23}a_{31}$  și  $a_{13}a_{21}a_{32}$ ) (fig. 2.1).

Termenii cu semnul minus în dezvoltarea determinantului se obțin înmulțind numerele de pe diagonala secundară ( $-a_{13}a_{22}a_{31}$ ) și cele din vîrfurile „triunghiurilor” care au bazele paralele cu această diagonală secundară ( $-a_{12}a_{21}a_{33}$  și  $-a_{11}a_{23}a_{32}$ ) (fig. 2.2).



Exemple. 
$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & \end{vmatrix} = (-1)(-2) - 4 \cdot 6 = -22 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \cdot 2 - (-2) \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot 2 = 3.$$

*Determinantul de ordinul al n-lea.* Fie matricea  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Numărul

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

unde suma este extinsă asupra celor  $n!$  permutări  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  ale numerelor  $1, 2, \dots, n$  se numește *determinantul matricei A* sau *determinant de ordinul al n-lea* și se notează

$$\det(a_{ij}) = \det A = |a_{ij}|.$$

*Minori ai unui determinant.* Se numește *minor al elementului  $a_{ij}$*  din determinantul matricei  $A$ , determinantul de ordinul  $n-1$  ce se obține din  $A$  prin eliminarea liniei  $i$  și a coloanei  $j$  și se notează  $M_{ij}$ .

*Complement algebric.* Se numește *complement algebric* sau *cofactor* al elementului  $a_{ij}$  din determinantul matricei  $A$  numărul

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Semnele cu care se prevăd minorii  $M_{ij}$  pentru a deveni complementi algebrici sînt date în tabloul următor:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

*Dezvoltarea determinantului  $\det A$  după elementele liniei  $i$ :*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \quad (1)$$

Pentru  $h \neq i$  avem

$$0 = a_{i1}A_{h1} + a_{i2}A_{h2} + \dots + a_{in}A_{hn} \quad (1')$$

*Dezvoltarea determinantului  $\det A$  după elementele coloanei  $j$ :*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (2)$$

Pentru  $k \neq j$ , avem

$$0 = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{nk} \quad (2')$$

*Exemplu.* Fie  $n = 4$ . Dezvoltarea lui  $\det A$  după elementele primei coloane

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\
 & + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Determinantul produsului a două matrice

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

### Proprietăți ale determinanților

1) Dacă toate elementele unei coloane sau ale unei linii dintr-o matrice<sup>1)</sup> sînt egale cu zero, atunci determinantul acestei matrice este egal cu zero.

2) Dacă elementele a două linii sau a două coloane dintr-o matrice sînt egale sau proporționale, atunci determinantul acestei matrice este egal cu zero.

3) Dacă schimbăm două linii sau două coloane între ele într-o matrice  $A$ , obținînd o nouă matrice  $A'$ , atunci  $\det A' = -\det A$ .

4) Dacă într-o matrice  $A$  înmulțim o linie sau o coloană cu un număr  $a$ , obținînd o nouă matrice  $A'$ , atunci  $\det A' = a \det A$ .

5) Orice matrice  $A$  și transpusa ei<sup>t</sup>  $A$  au același determinant,  $\det {}^tA = \det A$ .

6) Dacă într-o matrice  $A$  o coloană sau o linie este o combinație liniară a celorlalte coloane sau linii, atunci  $\det A = 0$ .

7) Dacă într-o matrice  $A$  toate elementele unei linii sau ale unei coloane sînt sume de cîte doi termeni atunci  $\det A$  se poate scrie ca suma a doi determinanți.

8) Orice matrice pătrată de ordin impar antisimetrică (strîmb-simetrică) are determinantul său egal cu zero.

9) Dacă  $A = (a_{ij})$  și  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  sînt complemenții algebrici ai elementelor  $a_{ij}$ , atunci  $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ .

10) Determinantul unei matrice antisimetrice de ordin par este pătratul unui polinom format cu elementele matricei.

### Determinanți importanți. Determinanți celebri.

1) *Determinant adjunct*. Determinantul matricei adjunkte  $A^*$  a unei matrice  $A$  se numește *determinant adjunct* și el este egal cu

$$d_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{pn} \end{vmatrix} = D^{n-1},$$

dacă  $D = \det A$ .

<sup>1)</sup> Aici și mai departe prin matrice înțelegem o matrice pătrată.

2) *Determinant reciproc.* Dacă o matrice  $A$  este inversabilă, determinantul  $\delta$  al matricei inverse (reciproce)  $A^{-1}$  se numește *determinant reciproc* și este egal cu

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det A}.$$

3) *Determinant principal.* Fie  $A \in M_{m,n}$  o matrice. Se numește *determinant principal* corespunzător matricei  $A$  un determinant de ordinul maxim, format cu elementele matricei  $A$ , care este nenul.

4) *Determinantul Vandermonde.* Se numește *determinant Vandermonde* determinantul de forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

5) *Determinantul lui Wronski.* Fie  $y_1, y_2, \dots, y_n: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  funcții de clasă  $C^{n-1}$ . Se numește *determinant al lui Wronski* corespunzător acestor funcții sau *wronskian* determinantul

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

6) *Inegalitatea lui J. Hadamard.* Fie  $D$  determinantul corespunzător matricei  $A \in M_n$ . Atunci avem

$$D^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_{i1}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n a_{i2}^2 \right) \dots \left( \sum_{i=1}^n a_{in}^2 \right).$$

7) *Determinantul continuant*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

8) Determinantul dublu simetric de ordinul 6:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & a_5 \\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2 & b_3 & a_4 \\ a_4 & b_2 & c_2 & c_1 & b_2 & a_3 \\ a_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & a_2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

9) Determinantul circulant:

$$Z_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots \end{vmatrix}$$

10) Ecuația seculară ( $a_{ik} \in \mathbb{R}$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

## 2.16. Sisteme de ecuații afine<sup>1)</sup> (liniare și neomogene)

$\alpha$ ) Sisteme de  $n$  ecuații afine cu  $n$  necunoscute ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad D = |a_{ik}| \neq 0, \quad a_{ik}, b_i \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Soluția unică este dată de regula lui Cramer sub forma unui vector cu  $n$  componente  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , unde

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}. \quad (2)$$

determinantul  $D_i$  obținându-se din  $D$  prin înlocuirea elementelor din coloana  $i$

cu termenii liberi, anume cu  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

<sup>1)</sup> În scriere matricială sistemul afim (1) are forma  $AX = B$  și soluția  $X = A^{-1}B$ ,  $\det A \neq 0$ .  
<sup>2)</sup> În locul corpului  $\mathbb{R}$  putem avea corpul  $\mathbb{C}$  sau  $Z_p$ , cu  $p$  prim etc.

Exemplu. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2; & \text{aici } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0. \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$$

Sistemul admite soluția unică

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}; \quad x = \frac{3}{2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-4}; \quad y = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4}; \quad z = \frac{5}{2}.$$

β) Sisteme de  $m$  ecuații afine cu  $n$  necunoscute ( $n, m \in \mathbb{N}^*$ )

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Teorema lui Rouché-Fontené: O condiție necesară și suficientă ca sistemul (3) să aibă soluții este ca toți determinanții lui caracteristici să fie nuli.

Din matricca  $A = \|a_{ik}\|$  a coeficienților necunoscutelor se extrage un determinant nenul de ordin maxim  $p$ , notat  $D_p$ , și numit determinant principal și se construiesc determinanții caracteristici,  $D_c$ ,  $c = p + 1, p + 2, \dots, m$  prin bordarea determinantului principal „orizontal”, jos, cu coeficienții necunoscutelor principale din ecuațiile rămase, care nu au intrat în formarea determinantului principal, și „vertical”, în dreapta, cu termeni liberi corespunzători.

1) Cazul  $m = n$ .

i) Dacă  $D \neq 0$ , atunci sistemul este cramerian și are soluția unică dată de (2).

ii) Dacă  $D = 0$  și cel puțin un determinant caracteristic este diferit de zero, atunci sistemul nu are soluții.

iii) Dacă  $D = 0$  și toți determinanții caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil, dar nedeterminat. Se rezolvă cele  $p$  ecuații principale și se obține necunoscutele principale  $x_1, x_2, \dots, x_p$  în funcție de  $x_{p+1}, \dots, x_n$ . Sistemul are o „nedeterminare” de ordinul  $n - p$ , în sensul că necunoscutele  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  rămîn arbitrare.

*Exemplu.* Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Determinantul sistemului este  $D = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$ .

i) Dacă  $D \neq 0$ , sistemul are soluția unică  $x = -\frac{\lambda + 1}{(\lambda + 2)}$ ,

$$y = \frac{1}{\lambda + 2}, \quad z = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}.$$

ii) Dacă  $D = 0$  avem situațiile următoare:

Dacă  $\lambda = 1$  toate cele 3 ecuații se reduc la una singură ( $m = 1, n = 3, p = 1$ ) și sistemul admite o mulțime de soluții cu  $a$  și  $b$  arbitrari în  $\mathbb{R}$ :

$$x = a, \quad y = b, \quad z = 1 - a - b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dacă  $\lambda = -2$  ( $m = 3, n = 3$ ) luăm drept determinant principal

$$D_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad \text{deci } p = 2.$$

Acestuia îi corespunde un singur determinant caracteristic

$$D_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Cum  $D_c \neq 0$ , rezultă că în acest caz sistemul este incompatibil.

2) Cazul  $m < n$ .

Sistemul nu are soluție unică ( $p \leq m < n$ ).

i) Dacă cel puțin un determinant caracteristic este nenul, atunci sistemul nu are soluții, este incompatibil.

ii) Dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil, dar nedeterminat. Sistemul are o „nedeterminare“ de ordinul  $n - p$ .

*Exemplu.* Să se rezolve în mulțimea claselor de resturi modul 7 sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 6 \\ x + 4y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + 6z = 5 \end{cases}$$

*Rezolvare.* Întrucît ( $\mathbb{Z}_7, +, \cdot$ ) este corp, calculele se fac exact ca în  $\mathbb{R}$ . Avem

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1) =$$

$$= 2(1 + 5 + 2 + 1 + 1 + 4) = 0.$$

$$\text{Luăm } D_p = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 0.$$

$$\text{Calculăm } D_c = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \text{ găsim } D_c = 0.$$

Sintem în cazul *teoremei Rouché-Fontené* și soluția se află rezolvînd sistemul

$$\begin{aligned} 3x + y &= 6 - 2z, \\ x + 4y &= 3 - 2z. \end{aligned}$$

Se găsește  $x = 2z$ ,  $y = 6 + 6z$ ,  $z = \alpha$ ,  $\alpha$  oarecare în  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3) Cazul  $m > n$  ( $p \leq n$ ).

i) Dacă cel puțin un determinant caracteristic este diferit de zero, atunci sistemul este incompatibil.

ii) Dacă toți determinanții caracteristici sînt zero, atunci sistemul este compatibil, dar nedeterminat. Sistemul are o „nedeterminare” de ordinul  $n - p$ .

*Exemplu.* Să se rezolve sistemul lui Rolle:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + y + 2z = 13; \end{cases}$$

aici  $m = 5$  și  $n = 3$ . Din matricea coeficienților găsim determinantul principal:

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ deci } p = 3.$$

Aceștia îi corespund determinanții caracteristici

$$D_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad D'_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 13 \end{vmatrix}.$$

Cum aceștia sînt nuli, rezultă că sistemul este compatibil și are soluția:  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $z = 4$ .

Un caz particular important:  $n + 1$  ecuații afine cu  $n$  necunoscute. O condiție necesară și suficientă ca acest sistem să fie compatibil este ca determinantul matricei extinse a sistemului să fie nul.

*Exemplu.* Să se afle valoarea parametrului  $\alpha \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2xy = 4 \\ \alpha x - y = 3 \end{cases}$$

este compatibil.

Aici matricea extinsă este  $A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2\alpha & 4 \\ \alpha & -1 & 3 \end{pmatrix}$  Apoi

$\det A' = 14(1 - \alpha^2)$  și  $\det A' = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1$  sau  $\alpha^2 = 1$ . Pentru  $\alpha = -1$ , rezultă soluția unică  $x = -\frac{2}{5}$ ,  $y = -\frac{13}{5}$ , iar pentru  $\alpha = 1$  găsim soluția  $x = 2$ ,  $y = -1$ . Pentru  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  sistemul nu are soluții.

$\gamma)$  Sisteme de  $m$  ecuații liniare cu  $n$  necunoscute ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ )

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{sau} \quad AX = 0.$$

1) Cazul  $m = n$

i) Dacă  $D \neq 0$ , atunci sistemul este cramerian și are soluția unică nulă  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ .

ii) Dacă  $D = 0$ , sistemul admite soluții diferite de soluția nulă (sistem în cazul  $\beta 2$ ).

2) Cazul  $m < n$

Dacă  $p$  ( $\leq m$ ) este ordinul determinantului principal, cum  $D_c = 0$ , rezultă că sistemul are o „nedeterminare“ de ordinul  $n - p$ .

3) Cazul  $m > n$

i) Dacă  $p = n$ , atunci sistemul admite numai soluția nulă.

ii) Dacă  $p < n$ , atunci sistemul are o „nedeterminare“ de ordinul  $n - p$ .

*Exemplu.* Să se rezolve sistemul liniar

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x - 5y + 4z = 0, \\ x + 17y + 4z = 0. \end{cases}$$

Din matricea sistemului ( $m = 4, n = 3$ ) deducem 4 determinanți de ordinul 3, toți nuli. Rezultă  $D_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 (p = 2)$ ; necunoscutele



principale sînt  $x$  și  $y$ . Lui  $D_p$  îi corespund doi determinanți caracteristici nuli. Sistemul admite soluții nenule și acestea se obțin rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} x + 3y = -2z, \\ 2x - y = -3z. \end{cases}$$

Găsim astfel că sistemul admite o mulțime de soluții, cu  $a$  arbitrar,

$$x = -\frac{11}{7}a, \quad y = -\frac{1}{7}a, \quad z = a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

4) *Caz particular important* ( $n - 1$  ecuații cu  $n$  necunoscute)  $m = n - 1$  și  $p = n - 1$ . În această situație sistemul admite o mulțime de soluții, el avînd o „nedeterminare” de ordinul 1. Dacă admitem că

$$D_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{atunci}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D_p} x_n, \quad x_2 = \frac{D_2}{D_p} x_n, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{D_{n-1}}{D_p} x_n,$$

cu  $x_n$  arbitrar în  $\mathbf{R}$ , iar  $D_j$  obținîndu-se din  $D_p$  prin înlocuirea coloanei  $j$  cu vectorul-coloană

$$\begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ -a_{2,n} \\ \vdots \\ -a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

## 2.17. Polinoame

### 2.17.1. Polinoame cu coeficienți complexi

Forma algebrică a unui polinom  $f \in \mathbf{C}[X]^*$  este  $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$

$$f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + a_n$$

unde numerele complexe  $a_0, \dots, a_n$  sînt coeficienții polinomului,  $X = (0, 1, 0, \dots)$  este nedeterminată (un polinom particular),  $n$  este gradul polinomului,  $a_n$  termenul liber, iar  $a_0$  coeficientul dominant.

Funcția polinomială asociată polinomului  $f \in \mathbf{C}[X]$  este o funcție  $\tilde{f} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  cu proprietatea  $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{C}$ ,  $f(\alpha)$  fiind valoarea polinomului  $f$  în  $\alpha$ .

\*) În general se poate considera inelul polinoamelor  $K[X]$ , unde  $K$  este un corp comutativ necarec, de pildă  $Z_p$  cu  $p$  prim.

Dacă  $f = g$ , atunci  $\tilde{f} = \tilde{g}$ .

Există însă și polinoame diferite, ale căror funcții polinomiale coincid.

Exemplu.  $f(x) = X$  și  $g(X) = X^3$ ,  $f \neq g$ ,  $f, g \in Z_3[X]$ ;

$x$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\Rightarrow \tilde{f} = \tilde{g}$ .
$f(x)$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	
$g(x)$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	

### Teorema împărțirii cu rest a două polinoame.

Oricare ar fi  $f, g \in \mathbb{C}[X]$ ,  $g \neq 0$ , există polinoamele unice  $q, r \in \mathbb{C}[X]$ , astfel încât  $f = gq + r$ ,  $\text{grad } r < \text{grad } g$ .

Polinomul  $f$  se numește *deîmpărțit*,  $g$  *împărțitor*,  $q$  *cît* și  $r$  *rest*.

*Împărțirea unui polinom cu  $X - a$* : Dacă  $f \in \mathbb{C}[X]$  și  $a \in \mathbb{C}$ , atunci există  $q \in \mathbb{C}[X]$  unic, astfel încât  $f = (X - a)q + r(a)$ .

Restul împărțirii polinomului  $f \in \mathbb{C}[X]$ ,  $f \neq 0$ , cu  $X - a$  este  $f(a)$ . Rezultă că acesta se poate afla fără a efectua împărțirea.

*Schema lui Horner* ne ajută să aflăm cîtul  $q = b_0X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \dots + b_{n-1}$  al împărțirii polinomului  $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$  la polinomul  $g = X - a$  precum și restul acestei împărțiri,  $r = f(a) = ab_{n-1} + a_n$ .

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a$	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} =$ $= ab_{n-2} + a_{n-1}$	$r = f(a) =$ $= ab_{n-1} + a_n$

Exemplu. Pentru  $f = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X + 4$  și  $g = X + 1$  avem

	1	2	5	4	4
-1	1	1	4	0	4

respectiv  $q = X^3 + X^2 + 4X$  și  $r = 4$ .

### 2.17.1.1. Divizibilitatea polinoamelor

*Definiție.* Fie  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  două polinoame. Spunem că polinomul  $g$  divide pe  $f$  și scriem  $g | f$  dacă există  $q \in \mathbb{C}[X]$ , astfel încât  $f = qg$ .

Se mai spune că  $f$  este *divizibil* prin  $g$ ,  $f$  este un *multiplu* al lui  $g$  sau că  $g$  este un *divizor* al lui  $f$ .

*Proprietăți.* 1) Polinoamele de grad zero (adică constantele nenule) divid orice polinom.

2) Polinomul  $g$  divide pe  $f \neq 0$ , dacă și numai dacă restul împărțirii lui  $f$  la  $g$  este nul.

In particular  $X - a$  divide pe  $f \neq 0$ , dacă și numai dacă  $f(a) = 0$ .

3) Dacă  $g$  divide pe  $f$  și  $f \neq 0$ , atunci  $\text{grad } f \geq \text{grad } g$ .

4) Dacă  $a \in \mathbb{C}^*$ , atunci  $af | f$ .

5) Divizibilitatea polinoamelor este reflexivă ( $f | f$ ) și tranzitivă ( $f | g$  și  $g | h \Rightarrow f | h$ ).

6) Dacă  $f | g$  și  $g | f$ , atunci  $f$  și  $g$  se numesc asociate în divizibilitate, adică  $\exists a \in \mathbb{C}^*$ , astfel încît  $f = ag$ .

## 2.17.1.2. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al polinoamelor

*Definiție.* Un polinom  $d$  se numește c.m.m.d.c. al polinoamelor  $f$  și  $g$

1) Dacă  $d | f$  și  $d | g$ .

2) Dacă  $d' | f$  și  $d' | g$ , atunci  $d' | d$ .

Notăm  $d = (f, g)$ .

*Teoremă.* Orice două polinoame  $f$  și  $g$  admit un c.m.m.d.c. El se determină cu algoritmul lui Euclid și este egal cu ultimul rest nenul.

*Exemplu.* Polinoamele  $f = X^2 - 1$  și  $g = (X + 1)^3$  au  $d = X + 1$ .

*Teoremă.* Dacă  $d$  este c.m.m.d.c. al polinoamelor  $f$  și  $g$ , atunci există polinoamele  $u$  și  $v$  astfel încît

$$uf + vg = d.$$

*Definiție.* Două polinoame  $f$  și  $g$  pentru care  $d = 1$  se numesc prime între ele.

*Exemplu.*  $f = X^2 - X + 1$  și  $g = X^2 + X + 1$  sînt polinoame prime între ele.

*Exemplu.* Fie polinoamele  $f = X^3$  și  $g = (1 - X)^4$  prime între ele. Să se afle polinoamele  $u$  și  $v$  astfel ca să avem  $uf + vg = 1$ .

*Rezolvare.* Incercăm  $u$  de gradul patru și  $v$  de gradul trei. Nu reușim. Micșorăm gradele lui  $u$  și  $v$  cu cîte o unitate. Fie  $u = b_0X^3 + b_1X^2 + b_2X + b_3$  și  $v = a_0X^2 + a_1X + a_2$ .

Scriem relația noastră astfel

$$X^3(b_0X^3 + b_1X^2 + b_2X + b_3) + (1 - X)^4(a_0X^2 + a_1X + a_2) = 1.$$

Inlocuim pe  $X$  cu 0 și găsim  $a_2 = 1$ .

Împărțim cu  $(1 - X)^4 \neq 0$ , derivăm odată

$$\frac{3X^2u}{(1 - X)^4} + \frac{X^3u'}{(1 - X)^4} + \frac{4X^3u}{(1 - X)^5} + 2a_0X + a_1 = \frac{4}{(1 - X)^5}$$

și inlocuim pe  $X$  cu zero. Găsim  $a_1 = 4$ .

Repetind această operație, găsim  $a_0 = 10$ .

Deci  $v = 10X^2 + 4X + 1$ .

Dezvoltăm pe  $u$  după puterile lui  $X - 1$ , sub forma

$u = C_0(X - 1)^3 + C_1(X - 1)^2 + C_2(X - 1) + C_3$ , înlocuim apoi pe  $X = 1$  și găsim  $C_3 = 1$ .

Ulterior împărțim cu  $X^3$ , derivăm succesiv de 3 ori și înlocuim pe  $X$  cu 1.

Găsim  $C_2 = -3$ ,  $C_1 = 6$  și  $C_0 = -10$ .

Acum  $u = -10(X-1)^3 + 6(X-1)^2 - 3(X-1) + 1$  sau

$$u = -10X^3 + 36X^2 - 45X + 20.$$

### 2.17.1.3. Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al polinoamelor

*Definiție.* Un polinom  $m$  se numește c.m.m.m.c. al polinoamelor  $f$  și  $g$  dacă:

1)  $f \mid m$  și  $g \mid m$ .

2) Dacă  $f \mid m'$  și  $g \mid m'$ , atunci  $m \mid m'$ .

*Exemplu.* Pentru polinoamele  $f = X^2 - 1$  și  $g = (X+1)^3$ , avem  $m = (X-1)(X+1)^3$ .

*Teoremă.* Dacă  $d$  este c.m.m.d.c. al polinoamelor  $f$  și  $g$ , atunci  $m = \frac{fg}{d}$ .

### 2.17.1.4. Rădăcinile polinoamelor

*Definiție.* Numărul  $\alpha \in \mathbb{C}$  se numește rădăcină a polinomului  $f$ , dacă și numai dacă  $\tilde{f}(\alpha) = 0$ .

*Teorema lui Bézout.* Numărul  $\alpha \in \mathbb{C}$  este rădăcină a polinomului  $f \neq 0$  dacă și numai dacă  $(X - \alpha) \mid f$ .

*Definiție.* Numărul  $\alpha$  se numește rădăcină multiplă de ordinul  $p$  a polinomului  $f \neq 0$ , dacă și numai dacă  $(X - \alpha)^p$  divide pe  $f$ , iar  $(X - \alpha)^{p+1}$  nu-l divide pe  $f$ .

Pentru  $p = 1$ , rădăcină se numește simplă, iar pentru  $p = 2$  ea se numește rădăcină dublă.

*Teoremă.* Numărul  $\alpha \in \mathbb{C}$  este rădăcină multiplă de ordinul  $p$  al polinomului  $f$ , dacă și numai dacă

$$\tilde{f}(\alpha) = 0; \tilde{f}'(\alpha) = 0; \dots; \tilde{f}^{(p-1)}(\alpha) = 0; \tilde{f}^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

*Teoremă.* Dacă două polinoame  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  au proprietatea că  $f(z) = g(z)$  oricare ar fi  $z \in \mathbb{C}$ , atunci  $f = g$ .

*Teoremă.* Dacă  $f \in \mathbb{C}[X]$  este un polinom de grad  $n$  și  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sînt rădăcinile lui cu ordinele de multiplicitate  $m_1, m_2, \dots, m_n$  atunci

$$f = a_0(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \dots (X - x_n)^{m_n}$$

unde  $a_0$  este coeficientul dominant al lui  $f$ , iar

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = \text{grad } f.$$

### 2.17.1.5. Rădăcini comune la două polinoame. Rezultant

*Definiție.* Se numește *rezultant* a două polinoame

$$f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \text{ și } g = b_0 X^m + b_1 X^{m-1} + \dots + b_m.$$

determinantul

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix} \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \\ \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ linii} \\ n \text{ linii} \end{array}$$

*Teoremă.* Polinoamele  $f$  și  $g$  au cel puțin o rădăcină comună, dacă și numai dacă  $R(f, g) = 0$ .

*Exemplu.* Să se afle valorile lui  $m \in \mathbf{R}$ , pentru care ecuațiile  $x^2 + mx + 1 = 0$  și  $x^2 + x + m = 0$  au o rădăcină comună.

Rezultantul celor două polinoame  $f = x^2 + mx + 1$  și  $g = x^2 + x + m$  este

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2.$$

Din  $R(f, g) = 0$  rezultă  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $m_3 = -2$ .

Pentru  $m_1 = m_2 = 1$  ecuațiile coincid și au două rădăcini comune, iar pentru  $m_3 = -2$  ecuațiile au o singură rădăcină comună  $\alpha = 1$ .

### 2.17.1.6. Polinoame ireductibile

*Definiție.* Un polinom  $f$  se numește *ireductibil* peste corpul comutativ în care coeficienții lui iau valori dacă nu există  $g$  și  $h$ , polinoame cu coeficienți în același corp, astfel încât să avem

$$f = gh, \text{ grad } g, \text{ grad } h < \text{grad } f.$$

Polinomul  $f$  se numește *reductibil* peste corpul respectiv în caz contrar.

*Exemple.*  $f = X^2 + 3$  este ireductibil peste  $\mathbf{R}$ ;  $f = X^2 - 4$  este reductibil peste  $\mathbf{R}$ , fiindcă  $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ ;  $f = X^2 + 1$  este ireductibil peste  $\mathbf{R}$ , dar reductibil peste  $\mathbf{C}$ .

*Teoremă.* Un polinom cu coeficienți într-un corp comutativ, de grad  $n > 1$ , este ireductibil peste acel corp dacă și numai dacă polinomul nu are rădăcini, în corpul respectiv.

*Teoremă.* Un polinom  $f \in \mathbf{C}[X]$  este ireductibil (adică nu poate fi factorizat) dacă și numai dacă este de formă  $f = aX + b$ .

**Teoremă.** Fie  $f \in \mathbb{C}[X]$  un polinom ireductibil.

Dacă  $f$  divide produsul de polinoame  $f_1 f_2 \dots f_n$ , atunci  $f$  divide cel puțin unul din factorii produsului.

### 2.17.1.7. Ecuații algebrice

**Definiție.** O ecuație de forma  $f(x) = 0$ , unde  $f \neq 0$  este un polinom, se numește ecuație algebrică cu o singură necunoscută.

**Teorema lui Abel-Ruffini.** Ecuațiile algebrice de grad mai mare decît patru nu se pot rezolva prin radicali.

**Teorema lui D'Alembert-Gauss.** Orice ecuație algebrică

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

de grad mai mare decît unu sau egal cu unu, are cel puțin o rădăcină (complexă).

**Teoremă.** Dacă un polinom  $f$  de gradul  $n$  se anulează pentru  $n + 1$  numere distincte, atunci  $f = 0$ .

**Formulele lui Viète.** Dacă numerele complexe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sînt rădăcinile polinomului  $f \in \mathbb{C}[X]$ ,  $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $a_0 \neq 0$ , atunci

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

.....

$$x_1 x_2 \dots x_k + x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} + \dots + x_{m-k+1} x_{m-k+2} \dots x_m = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

.....

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

### 2.17.1.8. Formula lui Taylor și formula lui Mac-Laurin pentru polinoame:

$$f(X+h) = f(X) + \frac{h}{1!} f'(X) + \frac{h^2}{2!} f''(X) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(X).$$

$$f(X) = f(0) + \frac{X}{1!} f'(0) + \frac{X^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{X^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

## 2.17.2. Polinoame cu coeficienți reali. Ecuații algebrice

**Teoremă.** Orice polinom  $f \in \mathbf{R}[X]$  de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

**Teoremă.** Dacă un polinom  $f \in \mathbf{R}[X]$  admite pe  $\alpha = a + ib$ ,  $b \neq 0$ , drept rădăcină, atunci el admite ca rădăcină și pe  $\bar{\alpha} = a - ib$ , adică  $\tilde{f}(a + ib) = 0 \Rightarrow \tilde{f}(a - ib) = 0$ . Rădăcinile  $\alpha$  și  $\bar{\alpha}$  au același ordin de multiplicitate.

**Teoremă.** Orice polinom  $f \in \mathbf{R}[X]$ ,  $\text{grad } f \geq 2$ , are un număr par de rădăcini complexe.

**Teoremă.** Dacă  $f$  este un polinom cu coeficienți reali și pentru  $a, b \in \mathbf{R}$  avem  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , atunci  $f$  are cel puțin o rădăcină reală între  $a$  și  $b$ .

**Teoremă.** Între două rădăcini reale consecutive ale lui  $f \in \mathbf{R}[X]$  există cel puțin o rădăcină a lui  $f'$ .

**Teoremă.** Între două rădăcini reale consecutive ale derivatei lui  $f \in \mathbf{R}[X]$  există cel mult o rădăcină a lui  $f$ .

**Teoremă.** Un polinom  $f \in \mathbf{R}[X]$  este ireductibil dacă și numai dacă este de forma  $f = aX + b$ , cu  $a \neq 0$  sau  $f = aX^2 + bX + c$ , cu  $a \neq 0$  și  $b^2 - 4ac < 0$ .

**Teorema factorizării.** Orice polinom  $f \in \mathbf{R}[X]$  de grad mai mare decât 1 sau egal cu 1 poate fi factorizat (descompus în factori ireductibili) astfel

$$f = a_0 (X - x_1)^{p_1} \dots (X - x_k)^{p_k} (X^2 + b_1X + c_1)^{r_1} \dots (X^2 + b_sX + c_s)^{r_s},$$

unde  $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{R}$ , iar  $b_1^2 - 4c_1 < 0, \dots, b_s^2 - 4c_s < 0$ .

**Șirul lui Rolle.** Fie  $f \in \mathbf{R}[X]$  un polinom și  $c_1, c_2, \dots, c_m$  rădăcinile reale ale derivatei  $f'$ . Fie  $|c_j| < M$ ,  $j = 1, m$ . Atunci șirul

$$f(-M), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_m), f(M).$$

se numește șirul lui Rolle asociat polinomului  $f$ .

**Teoremă.** Numărul rădăcinilor reale simple ale unui polinom  $f \in \mathbf{R}[X]$  este egal cu numărul de variații de semn ale șirului lui Rolle al lui  $f$ .

**Exemplu.** Pentru  $f = 3X^4 - 4X^3 - 12X^2 - 12$  avem

$$f' = 12X(X^2 - X - 2). \text{ Deci } c_1 = -1, c_2 = 0 \text{ și } c_3 = 2.$$

Construim șirul lui Rolle

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Rezultă că polinomul  $f$  are două rădăcini reale simple  $x_1 \in (-\infty, -1)$  și  $x_2 \in (2, +\infty)$ .

## 2.17.3. Polinoame cu coeficienți raționali. Ecuații algebrice

**Teoremă.** Dacă un polinom  $f \in \mathbf{Q}[X]$  admite pe  $\alpha = a + b\sqrt{d}$  ( $a, b \in \mathbf{Q}$ ,  $b \neq 0$ ,  $d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ) drept rădăcină, atunci el admite și pe  $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{d}$  ca rădăcină, adică  $f(a + b\sqrt{d}) = 0 \Rightarrow f(a - b\sqrt{d}) = 0$ ;  $a + b\sqrt{d}$  și  $a - b\sqrt{d}$  au același ordin de multiplicitate.

## 2.17.4. Polinoame cu coeficienți întregi

*Teoremă.* Dacă un polinom  $f \in \mathbf{Z}[X]$ ,  $\text{grad } f \geq 1$ , admite o rădăcină rațională  $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $(p, q) = 1$ , atunci  $p$  divide termenul liber  $a_n$  (adică  $p \mid a_n$ ), iar  $q$  divide coeficientul dominant  $a_0$  (adică  $q \mid a_0$ ).

În particular dacă  $f \in \mathbf{Z}[X]$  are o rădăcină întregă  $\alpha = p$ , atunci aceasta este un divizor al termenului liber  $a_n$ .

## 2.17.5. Aproximarea rădăcinilor iraționale ale polinoamelor $f \in \mathbf{R}[X]$

*Metoda coardei (Regula falsi):* Dacă  $f \in \mathbf{R}[X]$  are în  $(a, b) \subset \mathbf{R}$  o rădăcină  $x_0$  atunci

$$x_0 \simeq a - \frac{b - a}{\tilde{f}(b) - \tilde{f}(a)} \tilde{f}(a). \quad (1)$$

*Metoda tangentei sau metoda lui Newton.* Dacă  $f \in \mathbf{R}[X]$  are în  $(a, b) \subset \mathbf{R}$  o rădăcină  $x_0$ , atunci

$$x_0 \simeq a - \frac{\tilde{f}(a)}{\tilde{f}'(a)} \quad (2)$$

sau

$$x_0 \simeq b - \frac{\tilde{f}(b)}{\tilde{f}'(b)}. \quad (3)$$

*Exemplu.* Fie polinomul  $f = X^3 + X^2 - 21X - 20$ . Se știe că el admite rădăcina  $x_0 \in (4; 5)$ . Să se determine  $x_0$  cu două zecimale exacte.

*Soluție.* Numărul  $x_0$  este rădăcina a lui  $f$ , deoarece  $f(4) = -24 < 0$  și  $f(5) = 25 > 0$ . Luăm  $A(4, -24)$ ,  $B(5, 25)$  pe graficul lui  $f$ . Avem astfel  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $f(a) = -24$ ;  $f(b) = 25$ . Cu formula (1) găsim

$$x_1 = 4 - \frac{1}{49}(-24); \quad x_1 \simeq 4,5. \quad (2)$$

Pentru a aplica formula (3), calculăm derivatele lui  $f$  și anume  $f' = 3X^2 + 2X - 21$ ,  $f'' = 6X + 2$ . Observăm că  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in (4; 5)$ . Avem apoi  $f'(b) = 64$ , iar (3) ne permite să scriem

$$x_2 = 5 - \frac{25}{64}; \quad x_2 \simeq 4,6 \quad (3)$$

Fiecare din numerele definite de (2) și (3) este o valoare aproximativă pentru  $x_0$ .

Putem obține o valoare mai apropiată de  $x_0$ , care se află în intervalul  $(4,5; 4,6)$ , dacă iterăm procedeul. Deci vom porni de la  $A_1(4,5; -3,125)$  și  $B_1(4,6; 1,896)$  și vom găsi

$$x'_1 \simeq 4,56224, \text{ respectiv } x'_2 \simeq 4,56331.$$

Evident rădăcina  $x_0$ , calculată cu două zecimale exacte, este  $x_0 = 4,56$ .



## 2.18. Structuri algebrice

### 2.18.1. Lege de compoziție internă

**Lege de compoziție internă definită pe o mulțime  $E \neq \emptyset$ .** Orice aplicație  $\varphi$  definită pe  $E \times E$  cu valori în  $E$ :

$$\varphi : E \times E \rightarrow E, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$$

se numește *lege de compoziție internă* sau simplu *lege internă*.

Elementul  $\varphi(x, y)$  din  $E$  se numește *compusul* lui  $x$  cu  $y$  prin  $\varphi$  și este un element unic.

Notății pentru legea  $\varphi : \ast, \circ, \perp, \top, \wedge, \vee, +, \cdot, \oplus, \odot$ . În notație aditivă scriem  $\varphi(x, y) = x + y$ , iar în cea multiplicativă  $\varphi(x, y) = xy$ .

*Exemple.* Se știe că  $\forall x, y \in \mathbb{N}$  avem  $x + y \in \mathbb{N}$ ,  $xy \in \mathbb{N}$ . Deci adunarea și înmulțirea numerelor naturale reprezintă legi de compoziție interne definite pe  $\mathbb{N}$ .

**Parte stabilă a unei mulțimi  $E \neq \emptyset$ .** O submulțime  $S$  a lui  $E$  cu proprietatea

$$\forall x, y \in S, \varphi(x, y) \in S$$

se numește *parte stabilă* a lui  $E$  în raport cu  $\varphi$ .

*Exemplu.* Submulțimea  $P$  a numerelor întregi pare este o parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  față de adunarea numerelor întregi.

**Proprietățile legilor interne.**

**Asocativitatea.** O lege de compoziție  $\ast$  definită pe  $E \times E$  cu valori în  $E$  se numește *asociativă* dacă

$$\forall x, y, z \in E, (x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z).$$

În notație aditivă aceasta se scrie:  $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$ , iar în notație multiplicativă aceasta devine  $\forall x, y, z \in E, (xy)z = x(yz)$ .

*Exemple.* 1) Adunarea și înmulțirea numerelor raționale sînt legi de compoziție asociative.

2) Scăderea și împărțirea numerelor reale nu sînt legi de compoziție asociative.

3) Compunerea funcțiilor definite pe  $E$  cu valori în  $E$  este o lege de compoziție asociativă.

**Comutativitatea.** O lege de compoziție  $\ast$  definită pe  $E \times E$  cu valori în  $E$  se numește *comutativă* dacă

$$\forall x, y \in E, x \ast y = y \ast x.$$

*Exemple.* 1) Reuniunea și intersecția mulțimilor sînt operații asociative și comutative.

2) Compunerea translațiilor este o lege de compoziție asociativă.

**Elementul neutru.** Un element  $e \in E$  se numește *element neutru* pentru o lege de compoziție  $\ast$  pe  $E$ , dacă  $\forall x \in E, x \ast e = e \ast x = x$ .

*Exemplu.* Zero este element neutru pentru adunare pe  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , iar 1 este element neutru pentru înmulțire pe  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .

**Teoremă.** Dacă o lege internă admite un element neutru, atunci acesta este unic.

**Elemente regulate** (simplificare la stînga și simplificare la dreapta). Fie  $E$  o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție  $*$ . Dacă din relația  $x * a = x * b$  rezultă  $a = b$ , spunem că  $x$  este element (din  $E$ ) cu care putem „simplifica” la stînga. Dacă din relația  $a * y = b * y$  rezultă  $a = b$ , spunem că  $y \in E$  este un element cu care putem „simplifica” la dreapta.

**Exemplu.** În  $(\mathbb{N}, +)$  avem  $a + x = x + b \Leftrightarrow a = b$ ,  $a, b, x \in \mathbb{N}$ . În schimb în  $(\mathbb{N}, \cdot)$  din  $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$ , nu putem deduce  $2 = 3$ .

**Elemente simetrizabile.** Un element  $x \in E$  se numește *simetrizabil* față de legea  $*$  (cu elementul neutru  $e$ ), dacă  $\exists x' \in E$ , astfel încît  $x' * x = x * x' = e$ .

Elementul  $x'$  se numește *simetricul* lui  $x$  și este unic.

În notație aditivă  $x' = -x$  și se numește *opusul* lui  $x$ , iar în notația multiplicativă  $x'$  se notează  $x^{-1}$  și se numește *inversul* lui  $x$ .

**Exemplu.** În mulțimea matricelor pătrate de ordinul  $n$ , cu elementele din  $\mathbb{R}$ , înzestrată cu operația de adunare, o matrice  $A$  are drept simetrică pe  $A' = -A$ . În mulțimea claselor de resturi modulo 5, înzestrată cu operația de înmulțire avem  $\hat{1}' = 1$ ,  $\hat{2}' = \hat{3}$ ;  $\hat{3}' = \hat{2}$ ,  $\hat{4}' = \hat{4}$ .

**Distributivitatea.** Fie  $E$  o mulțime nevidă înzestrată cu două legi de compoziție  $\perp$  și  $\top$ . Spunem că legea  $\top$  este *distributivă* față de legea  $\perp$ , dacă

$$\forall x, y, z \in E, \text{ avem}$$

$$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$$

$$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x).$$

(Distributivitatea celei de a doua legi față de prima lege, la stînga și la dreapta).

**Exemplu.** În mulțimea  $P(E)$  a părților unei mulțimi  $E$  intersecția este distributivă față de reuniune și reciproc.

## 2.18.2. Grupuri

**Definiție.** O mulțime  $G$  nevidă înzestrată cu o lege de compoziție  $*$  se numește *grup*, dacă verifică următoarele axiome (numite axiomele grupului):

$$G_1: \forall x, y, z \in G, \quad (x * y) * z = x * (y * z) \text{ (asociativitate)}$$

$$G_2: \exists e \in G, \quad \forall x \in G, \quad x * e = e * x = x, \text{ (există element neutru)}$$

$$G_3: \forall x \in G, \quad \exists x' \in G, \quad x * x' = x' * x = e \text{ (orice } x \text{ are un simetric } x')$$

Dacă în plus legea verifică și axioma:

$G_4: \forall x, y \in G, \quad x * y = y * x$  (comutativitate), atunci grupul  $(G, *)$  se numește *comutativ* sau *abelian*.

**Exemple:**  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  sînt grupuri abeliene;  $(\mathbb{R}, \cdot)$  nu este un grup fiindcă 0 nu are simetric;  $(\mathbb{N}, +)$  nu este grup fiindcă elementele nu au simetrice tot în  $\mathbb{N}$ .

Mulțimea rădăcinilor ecuației  $x^4 - 1 = 0$  formează un grup multiplicativ abelian.

Grupul lui Klein  $(\{e, a, b, c\}, \bullet)$

$\bullet$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

este un exemplu de grup cu 4 elemente.

*Operații într-un grup  $(G, *)$*

$$1. \forall x, a, b \in G, \quad x * a = x * b \Rightarrow a = b.$$

$$\forall y, a, b \in G, \quad a * y = b * y \Rightarrow a = b.$$

2. Într-un grup  $(G, *)$  ecuațiile  $x * a = b$  și  $c * x = d$ ,  $\forall a, b, c, d \in G$ , au soluții unice în  $G$ , anume  $x = b * a'$  și  $y = c' * d$ .

3. Fie  $G$  un grup multiplicativ. Dacă punem,  $\forall a \in G$  și

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^n = \begin{cases} e, & n = 0 \\ a^{n-1}a, & n \geq 1 \end{cases} \text{ atunci avem}$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, a^m a^n = a^{m+n}; (a^m)^n = a^{mn}.$$

Aceste proprietăți, cu ajutorul definiției:  $\forall n \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}, a^n = (a^{-n})^{-1}$ , se extind și la exponenți din  $\mathbb{Z}$ .

### 2.18.3. Inele

*Definiție.* O mulțime  $A$  nevidă, înzestrată cu două legi interne (pe care le vom nota  $+$  și  $\cdot$ ) se numește inel, dacă verifică axiomele următoare (numite axiomele inelului):

$$G_1: \forall x, y, z \in A, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$G_2: \exists O_A \in A, \quad \forall x \in A \quad O_A + x = x + O_A = x.$$

$$G_3: \forall x \in A, \quad \exists x' \in A; \quad x + x' = x + x = O_A.$$

$$G_4: \forall x, y \in A, \quad x + y = y + x.$$

$$M_1: \forall x, y, z \in A, \quad (xy)z = x(yz).$$

$$M_2: \exists 1_A \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \cdot 1_A = 1_A \cdot x = x,$$

$$D_1: \forall x, y, z \in A, \quad x(y + z) = xy + xz.$$

$$D_2: \forall x, y, z \in A, \quad (y + z)x = (yx) + (zx).$$

Dacă înmulțirea este comutativă [ $\forall x, y \in A, xy = yx$ ], inelul  $A$  se numește inel comutativ.

Elementele care admit simetrice față de înmulțire se numesc unități sau elemente inversabile ale inelului.

Un inel este fără divizori ai lui zero, dacă pentru  $x \neq 0$  și  $y \neq 0$  avem  $xy \neq 0$ .

*Exemple.*  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  este un inel comutativ numit *inelul întregilor raționali*.  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{C}, +, \cdot)$  sînt inele comutative. De asemenea avem inelele de polinoame  $\mathbf{Z}[X]$ ,  $\mathbf{Q}[X]$ ,  $\mathbf{R}[X]$ ,  $\mathbf{C}[X]$  și inelul claselor de resturi modulo  $n$ .

*Reguli de calcul într-un inel:*

- 1)  $\forall x \in A, xO_A = O_A \cdot x = O_A$ .
- 2)  $O_A \neq 1_A$ .
- 3)  $\forall x, y \in A, x(-y) = (-x)y = -xy$ .
- 4)  $\forall x, y \in A, (-x)(-y) = xy$ .
- 5)  $\forall x \in A, -(-x) = x$ .
- 6)  $\forall x, y, z \in A$  avem  $x(y-z) = xy - xz$  și  $(x-y)z = xz - yz$ .
- 7) Într-un inel fără divizori ai lui zero este valabilă simplificarea la stînga și la dreapta.

## 2.18.4. Corpuri

*Definiție.* Un inel  $K$  pentru care  $O_K \neq 1_K$  și orice  $x$  din  $K$ ,  $x \neq O_K$  are un simetric  $x^{-1}$  față de înmulțire se numește corp.

Un corp se numește *comutativ*, dacă înmulțirea este comutativă.

Deci axiomele corpului comutativ  $(K, +, \cdot)$  sînt:

$$A_1 \quad \forall x, y, z \in K, (x+y)+z = x+(y+z).$$

$$A_2 \quad \exists O_K \in K, \forall x \in K, O_K + x = x + O_K = x.$$

$$A_3 \quad \forall x \in K, \exists (-x) \in K, x + (-x) = (-x) + x = O_K.$$

$$A_4 \quad \forall x, y \in K, x + y = y + x.$$

$$M_1 \quad \forall x, y, z \in K, (xy)z = x(yz).$$

$$M_2 \quad \exists 1_K \in K, \forall x \in K, x \cdot 1_K = 1_K x = x.$$

$$M_3 \quad \forall x \in K \setminus \{O_K\}, \exists x^{-1} \in K, xx^{-1} = x^{-1}x = 1_K.$$

$$M_4 \quad \forall x, y \in K, xy = yx.$$

$$D \quad \forall x, y, z \in K, x(y+z) = xy + xz.$$

*Exemple de corpuri comutative,*  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  și  $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ .

Corpul claselor de resturi modulo  $p$ , cu  $p$  număr prim ( $p \geq 2$ ).

Mulțimea matricelor

$$\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$$

cu elemente în  $\mathbf{Z}_p$ , înzestrată cu adunarea și înmulțirea, este un corp.

*Teoremă:* 1. Corpurile nu admit divizori ai lui zero.

2. Elementele diferite de zero dintr-un corp formează un grup față de înmulțire.

## 2.18.5. Morfisme (omomorfisme)

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi înzestrate cu structurile algebrice  $(S)$  și  $(T)$ . Aditem că sînt date o aplicație asociind la fiecare lege internă  $\top$  relativă la  $S$  o lege internă  $\perp$  pe  $F$  relativă la  $(T)$  și o aplicație asociind la fiecare lege externă  $\star$  pe  $E$ , avînd drept domeniu al operatorilor pe  $\Omega$ , o lege externă  $\bar{\star}$  pe  $F$ , cu același domeniu de operatori, aceste aplicații fiind bijective.

O aplicație  $f: E \rightarrow F$  se numește morfism relativ la structurile  $(S)$  și  $(T)$  dacă

$$1) \quad \forall x, y \in E, \quad f(x \perp y) = f(x) \top f(y).$$

$$2) \quad \forall (\lambda, x) \in \Omega \times E, \quad f(\lambda \star x) = \lambda \bar{\star} f(x).$$

*Morfism (omomorfism) de grupuri.* Fie  $(G, \star)$  și  $(G', \cdot)$  două grupuri. Se numește morfism de grupuri o aplicație  $f: G \rightarrow G'$  pentru care

$$\forall x, y \in G, \quad f(x \star y) = f(x) \cdot f(y).$$

*Exemple.* 1) Aplicația  $f: (\mathbf{R}^*, \cdot) \rightarrow (M_2(\mathbf{R}), \cdot)$ , cu  $f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ , unde  $M_2(\mathbf{R})$  este mulțimea matricelor nesingulare de ordinul al doilea cu elemente reale este un morfism al grupului  $(\mathbf{R}^*, \cdot)$  în grupul  $(M_2(\mathbf{R}), \cdot)$ .

2) Grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule este omomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive prin  $f(z) = |z|$ .

*Teoremă.* Dacă  $f$  este un morfism de la  $G$  la  $G'$ , atunci  $f(e) = e'$  și  $\forall x \in G$  avem  $f(x') = (f(x))'$ .

*Morfism (omomorfism) de inele.* Fie  $(A, +, \cdot)$  și  $(A', +, \cdot)$  două inele. Se numește morfism de inele o aplicație  $f: A \rightarrow A'$  pentru care

$$\forall x, y \in A, \quad f(x + y) = f(x) + f(y); \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y); \quad f(1) = 1'.$$

*Exemple.* 1) Aplicația care asociază oricărui întreg rațional clasa de resturi modulo  $n$  este un morfism al inelului  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  în inelul claselor de resturi modulo  $n$ ,  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$ .

2) Aplicația  $f: (\mathbf{C}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbf{Z} + \sqrt{2}\mathbf{Z}, +, \cdot)$ , de la inelul numerelor complexe la inelul numerelor de forma  $a + \sqrt{2}b$ , cu  $a, b \in \mathbf{Z}$  definită prin

$$f(a + ib) = a + b\sqrt{2}$$

este un morfism de inele.

*Morfism (omomorfism) de corpuri.* Fie  $K$  și  $K'$  două corpuri. Se numește morfism de corpuri o aplicație  $f$  care este un morfism de inele de la  $K$  la  $K'$ .

## 2.18.6. Izomorfism

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi înzestrate cu structurile algebrice  $(S)$  și  $(T)$ . Se numește izomorfism al lui  $E$  în  $F$ , orice morfism bijectiv.

Rezultă astfel imediat definițiile izomorfismelor de grupuri, de inele și de corpuri.

*Exemplu.* Fie grupurile  $(\mathbb{C}, +)$  și  $(\mathbb{C}, \cdot)$ , unde  $\forall x, y \in \mathbb{C}, x * y = x + y + 1$  și  $x \cdot y = x + y + i$ .

Atunci  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , cu  $f(z) = iz$ , este un izomorfism de grupuri.

Inelul întregilor lui Gauss  $(\{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$  este izomorf cu inelul matricelor  $\left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}, +, \cdot$  prin funcția cu valori matriciale:  $f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ .

## 2.18.7. Automorfisme

Se numește *automorfism* orice izomorfism de la  $E$  la  $E$ .

*Exemplu.* 1) Fie  $E$  grupul multiplicativ al numerelor reale nenule. Atunci  $f(x) = x^{2m+1}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , este un automorfism de la  $E$  la  $E$ .

2) Fie  $A$  un inel. Dacă  $a \in A$  admite un invers  $a^{-1}$ , atunci  $f(x) = a \times a^{-1}$  este un automorfism al lui  $A$ .

3) Fie  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  corpul numerelor complexe. Aplicația  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , cu  $f(z) = \bar{z}$  este un automorfism de la  $\mathbb{C}$  la  $\mathbb{C}$ .

## 2.18.8. Endomorfisme

Se numește *endomorfism* orice morfism de la  $E$  la  $E$ .

*Exemplu.* Fie  $E$  grupul multiplicativ al numerelor reale nenule. Atunci  $f(x) = x^m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , este un endomorfism de la  $E$  la  $E$ .

## 2.19. Spațiu vectorial

### 2.19.1. Lege de compoziție externă

*Definiție.* Fie  $\Omega$  și  $M$  două mulțimi nevide. Se numește *lege de compoziție externă* orice aplicație de la  $\Omega \times M$  la  $M$ .

Astfel la orice  $\alpha$  din  $\Omega$  și  $x$  din  $M$  corespunde un singur element (o singură imagine) în  $M$  și pe care îl (o) vom nota  $\alpha * x$  sau  $\psi(\alpha, x)$ .

Se scrie  $\psi: \Omega \times M \rightarrow M$  sau  $(\alpha, x) \rightarrow \alpha * x$ .

Mulțimea  $\Omega$  se numește *domeniul operatorilor*,  $\alpha \in \Omega$  purtind numele de *operator* sau *scalar*, iar mulțimea  $M$  se numește *mulțimea vectorilor*, orice  $x \in M$  numindu-se *vector*.

Orice lege internă  $*$  definită pe  $E \times E$  cu valori în  $E$ ,  $(x, y) \mapsto x * y$ , poate fi considerată drept o lege externă dacă, domeniul operatorilor nu mai este „exterior” față de  $E$ , ci este tot  $E$  (în cele ce urmează vom vedea că  $\mathbb{R}$  este un spațiu vectorial pe el însuși, considerind mulțimea operatorilor  $\mathbb{R}$ , iar mulțimea vectorilor de asemenea  $\mathbb{R}$ ).

*Exemplu.* Înmulțirea vectorilor de poziție cu un scalar. Fie  $\Omega = \mathbb{R}$  și  $M = \mathbb{R}^3$ , mulțimea vectorilor de poziție  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  ai punctelor  $P(x, y, z)$  din  $\mathbb{R}^3$ . Prin definiție  $(\alpha, \vec{r}) \mapsto \alpha\vec{r}$  reprezintă vectorul de poziție al unui punct  $P'$ , definit astfel:  $|\vec{OP}'| = |\alpha| |\vec{r}|$ ,  $P'$  se află pe dreapta determinată de  $O$  și  $P$ , de aceeași parte cu  $P$  când  $\alpha > 0$  și în partea opusă când  $\alpha < 0$ . Legea de compoziție externă definită pe  $\mathbb{R} \times M$  cu valori în  $M$ , cu  $(\alpha, \vec{r}) \mapsto \alpha\vec{r}$  se numește înmulțirea vectorilor de poziție cu scalari.

## 2.19.2. Spațiu vectorial

Fie  $(K, +, \cdot)$  un corp comutativ,  $M$  o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție internă notată aditiv și fie o lege externă de la  $K \times M$  la  $M$ , notată multiplicativ.

Se numește spațiu vectorial peste  $K$  tripletul  $(M, +, \cdot)$  care verifică următoarele axiome:

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \left\{ \begin{array}{l}
 1. \forall x, y, z \in M, \quad (x + y) + z = x + (y + z) \\
 2. \forall x, y \in M, \quad x + y = y + x \\
 3. \exists O_M \in M, \quad \forall x \in M, \quad x + O_M = O_M + x = x \\
 4. \forall x \in M, \quad \exists (-x) \in M, \quad x + (-x) = (-x) + x = O_M
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{II} \left\{ \begin{array}{l}
 5. \forall x \in M, \quad 1_K \cdot x = x \\
 6. \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall x \in M, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{III} \left\{ \begin{array}{l}
 7. \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall x \in M, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \\
 8. \forall \alpha \in K \quad \forall x, y \in M, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

*Exemple.* 1) Fie  $K = \mathbf{R} = M$ ; atunci  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  este spațiu vectorial peste el însuși.

2) Mulțimea soluțiilor ecuației diferențiale  $y'' + y = 0$ ,  $M = \{\varphi : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid \varphi''(x) + \varphi(x) = 0, \forall x \in (a, b)\}$  înzestrată cu operațiile naturale de adunare a funcțiilor și de înmulțire cu scalari a acestor funcții, este un spațiu vectorial peste  $\mathbf{R}$ .

3) Mulțimea  $C$  a funcțiilor definite și continue pe un interval  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , cu valori reale, este un spațiu vectorial peste  $\mathbf{R}$  față de operațiile naturale de adunare a funcțiilor ( $\forall f, g \in C$  și  $\forall x \in [a, b]$ ,  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ) și de înmulțire a acestora cu scalari ( $\forall \lambda \in \mathbf{R}$  și  $\forall f \in C$ ,  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ).

**Consecințe ale axiomelor spațiului vectorial.**

- $\forall \alpha, \beta \in K$  și  $\forall x, y \in M$ , avem  $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$  și  $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$ .
- $\forall \alpha \in K$ ,  $\alpha O_M = O_M$ .
- $\forall x \in M$ ,  $O_K x = O_M$ .
- $\forall x \in M$ ,  $(-1_K)x = -x$ .
- $\alpha x = O_M \Rightarrow \alpha = O_K$  sau  $x = O_M$ .

## 2.19.3. Bază. Dependență și independență liniară

*Bază.* Fie  $M$  un spațiu vectorial peste  $K$ . Elementele  $e_1, e_2, \dots, e_n$  din  $M$  constituie o bază a lui  $M$  dacă:

$$1) \forall x \in M, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \text{ astfel încît } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

$$2) \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0, \text{ cu } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \text{ implică } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_K.$$

*Exemple.* 1) Vectorii  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  constituie o bază a spațiului vectorial al vectorilor de poziție din  $\mathbb{R}^2$ .

2) Vectorii  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  și  $e_3 = (0, 0, 1)$  constituie o bază a spațiului vectorial  $\mathbb{R}^3$ .

*Combinatie liniară cu coeficienți în  $K$ .* Fie  $x \in M$  un vector. Vectorul  $x$  este o *combinatie liniară* a vectorilor  $x_1, x_2, \dots, x_m$  din  $M$ , dacă  $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$  astfel încît

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m.$$

*Independență liniară.* Vectorii  $x_1, \dots, x_m$  din  $M$  se numesc *liniar independenți* dacă

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0_M, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K,$$

implică  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0_K$ .

*Exemplu.* Vectorii  $(1, 0)$  și  $(0, 1)$  din  $\mathbb{R}^2$  sînt liniar independenți sau distincții

*Dependență liniară.* Vectorii  $x_1, \dots, x_m \in M$  se numesc *liniar dependenți*, dacă  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ , nu toate nule, astfel încît să avem

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0_M.$$

*Exemplu.* Vectorii  $(2, 2)$  și  $(1, 1)$  din  $\mathbb{R}^2$  sînt liniar dependenți, fiindcă  $(2, 2) - 2(1, 1) = 0$ .

*Coordonatele unui vector într-o bază.* Dacă  $e_1, e_2, \dots, e_n$  este o bază a spațiului vectorial  $M$  peste  $K$  și  $x \in M$ , atunci scalarii  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ , unic determinați, astfel încît să avem  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , se numesc *coordoanatele vectorului*  $x$  în baza respectivă.

*Exemplu.* Vectorul de poziție  $\vec{r}(2, 3)$  în baza  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  din  $\mathbb{R}^2$  are coordonatele  $\alpha_1 = 2$  și  $\alpha_2 = 3$ .

## 2.19.4. Transformări liniare

Fie  $M$  și  $M'$  două spații vectoriale peste  $K$ . Orice aplicație  $T: M \rightarrow M'$  se numește *transformare liniară* sau *operație liniară*, dacă are proprietățile:

$$1) \forall x, y \in M, \quad T(x + y) = T(x) + T(y);$$

$$2) \forall \alpha \in K, \forall x \in M, \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

*Exemple.* 1) Fie  $C^1(I)$  mulțimea funcțiilor de clasă  $C^1$  definite pe  $I$ . Fie  $\frac{d}{dx}$  operația prin care unei funcții din  $C^1$  îi asociem derivata sa. Deci

$$(Tf)(x) = \left( \frac{d}{dx} f \right) (x) = f'(x). \text{ Această operație este o operație liniară.}$$

2. Transformarea de la  $\mathbb{R}^2$  la  $\mathbb{R}^2$  definită astfel:

$$x' = x + y, \quad y' = x - y$$

este o transformare liniară.



## 2.20. Folosirea tabelelor 2.1—2.7

### Tabela 2.1. Coeficienți binomiali

Tabela conține coeficienții binomiali,  $C_n^k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , care apar în dezvoltarea binomului lui Newton:  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ . În prima coloană se dă  $n$ , iar în celelalte  $C_n^0, \dots, C_n^n$  de la  $n = 1$  la  $n = 15$ . Folosirea tabelii este imediată:  $n$  se alege și apoi, pe aceeași orizontală cu  $n$ , citim  $C_n^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , care ne interesează.

### Tabela 2.2. Logaritmi zecimali ai numerelor de la 1 la 100

În această tabelă sînt date mantisele sau părțile zecimale ale logaritmilor numerelor întregi cuprinse între 1 și 100. În coloana  $N$  sînt trecute numerele de la 1 la 99, cifra zecilor fiind scrisă o singură dată. Modul de utilizarea al tabelii rezultă imediat.

### Tabela 2.3. Logaritmi zecimali ai numerelor de la 100 la 10 000

În această tabelă sînt date mantisele numerelor întregi cuprinse între 100 și 10 000. Numerele formate din trei cifre se găsesc în coloana  $N$ , iar în coloana alăturată (coloana 0) se află mantisele respective. Pentru ușurința citirii mantiselor, primele lor două cifre n-au fost scrise decît o singură dată și numai în coloana 0. Dacă numerele au patru cifre (ale căror prime trei cifre se află în coloana  $N$ , iar a patra în fruntea uneia dintre cele zece coloane alăturate), atunci ultimele trei cifre ale mantiselor logaritmilor respectivi se găsesc la intersecția liniei numărului format de primele trei cifre cu coloana care are deasupra cifra unităților; grupa de două cifre cu care începe mantisa se ia din coloana 0, pe aceeași linie sau mai sus. În cazul cînd ultimele trei cifre sînt însemnate cu o steluță, primele două cifre se iau din rîndul următor.

Se pun două probleme în calculele cu logaritmi: aflarea logaritmului unui număr dat și aflarea numărului al cărui logaritm a fost dat.

#### Problema 1

**Cazul 1.** Numărul are mai puțin de trei cifre, adică se găsește în tablele.

*Exemplu.* Să se afle  $\lg 542,3$ . Neținînd seamă de virgulă, căutăm mantisa logaritmului numărului 5 423, ale cărei ultime trei cifre le aflăm la intersecția liniei numărului 542 din coloana  $N$  și a coloanei lui 3; găsim 424. Adăugînd și primele două cifre, 73, mantisa căutată este 73 424; deci

$$\lg 5\ 423 = 3,73\ 424$$

(caracteristica, sau partea întregă a logaritmului, este 3) și

$$\lg 542,3 = 2,73\ 424$$

(caracteristica este 2).

**Cazul 2.** Numărul considerat are cinci sau mai multe cifre, deci nu se găsește în tablele.

*Exemplu.* Să se afle  $\lg 23\ 458$ .

Căutăm mai întîi mantisa logaritmului numărului 2 345; găsim 37 014 (am luat 37 în loc de 36, întrucît ultimele trei cifre ale mantisei au o steluță).

Deci

$$\lg 2\ 345 = 3,37\ 014$$

Dar

$$\lg 2\ 346 = 3,37\ 033.$$

Mantisa logaritmului numărului 2 345,8 este cuprinsă între 37 014 și 37 033, între care există o diferență de 19 unități de ordinul al cincilea zecimal. Admițind că creșterea numărului este proporțională cu creșterea logaritmului, urmează că unei creșteri cu o unitate a numărului 2 345 îi corespunde o creștere a logaritmului cu 19 unități de ordinul al cincilea zecimal. Deci creșterii de 0,8 unități îi corespunde o creștere de  $0,8 \times 19 = 15,2$  sau aproximativ de 15 unități de ordinul al cincilea zecimal al logaritmului. Așadar mantisa logaritmului numărului 2 345,8 este egală cu  $37\ 014 + 15 = 37\ 029$  și deci

$$\lg 2\ 345,8 = 3,37\ 029.$$

Urmează că

$$\lg 23\ 458 = 4,37\ 029.$$

În scopul ușurării calculelor, în cazul când numărul al cărui logaritm se caută are mai mult de cinci cifre, pentru a găsi creșterea corespunzătoare a logaritmului se folosesc părțile proporționale scrise în ultima coloană P.P.

*Exemplu.* Să se afle logaritmul numărului 147 756. Se caută întâi mantisa logaritmului numărului 1477,56. Pentru aceasta se află în primul rând mantisa logaritmului lui 1477; se găsește 16938, apoi mantisa logaritmului lui 1478 și se găsește 16967. Diferența între aceste două mantise este 29 de unități de ordinul al cincilea zecimal. Creșterii numărului 1477 cu 0,56 îi corespunde o creștere a logaritmului egală cu  $0,56 \times 29$  unități de ordinul al cincilea zecimal. Se evită înmulțirea, căutându-se în coloana P.P., coloana care are scris în capătul ei valoarea 29; la intersecția acestei coloane cu linia lui 5 (care reprezintă zecimi) se găsește  $14,5 \approx 15$  unități de ordinul al cincilea zecimal care reprezintă creșterea logaritmului pentru creșterea numărului cu 0,5. La intersecția coloanei lui 29 cu linia lui 6 se găsește 17,4 unități de ordinul al cincilea zecimal, corespunzătoare unei creșteri a numărului cu 0,6; unei creșteri a numărului cu 0,06 îi corespunde o creștere a logaritmului cu  $1,74 \approx 2$  unități de ordinul al cincilea zecimal. Deci mantisa căutată este  $16938 + 15 + 2 = 16955$ , iar  $\lg 147756 = 5,16955$ .

## Problema 2

**Cazul 1.** Mantisa logaritmului se găsește în tabele și deci numărul se află imediat.

*Exemplu.* Să se afle numărul al cărui logaritm este 1,91 089.

Se caută în coloana *O* până când se găsesc primele două cifre ale mantisei care sînt 91; acum se află foarte ușor și ultimele trei cifre, 089. Pe linia lui 089, în coloana *N*, citim 814 iar pe coloana lui 089 citim 5; deci ținînd seama de caracteristică, numărul căutat este 81,45.

**Cazul 2.** Mantisa nu se găsește în tabele.

*Exemplu.* Să se afle numărul al cărui logaritm este 2,73 129. Din tabele se deduce că mantisa logaritmului numărului căutat este cuprinsă între 73 127 și 73 135 cărora le corespund numerele 5 386 și 5 387; ea este mai apropiată de 73 127 de care diferă prin 2 unități. Diferența dintre mantisele 73 135 și 73 127 este de 8 unități. Admițînd iarăși că creșterea numerelor este proporțională cu creșterea logaritmilor respectivi urmează ca unei creșteri a man-

tisei cu 8 unități de ordinul al cincilea zecimal îi corespunde o creștere de o unitate a numărului; așadar unei creșteri de 2 unități a mantisei corespunde o creștere de  $\frac{2}{8} = 0,25$  unități sau aproximativ de 0,3 unități a numărului.

Ținând seama de caracteristică, numărul al cărui logaritm este 2,73 129 este 538,63. Se mai poate găsi creșterea corespunzătoare a numărului cu ajutorul ultimei coloane P.P.

#### Tabela 2.4. Antilogaritmi

Cu ajutorul acestei tabele putem afla numerele (antilogaritmi) corespunzătoare unor logaritmi dați. Mantisele logaritmilor sînt date cu trei cifre, primele două aflîndu-se în coloana întii, iar a treia în capul uncia din cele zece coloane următoare. Modul de folosire este foarte simplu. De exemplu să se afle numărul corespunzător logaritmului 1,7423. Căutăm mai întii numărul corespunzător logaritmului 1,742; la intersecția liniei lui 74 cu coloana lui 2 aflăm numărul căutat 5521 (nu ținem seama de virgulă). Diferența între numărul următor și acest număr este 13 care corespunde unei creșteri cu o unitate de ordinul al patrulea zecimal al mantisei. Deci creșterii cu 0,3 a mantisei corespunde o creștere de  $0,3 \times 13 = 3,9 \approx 4$  a numărului. Așadar numărul căutat, ținînd seamă de caracteristică, este 55,25.

#### Tabela 2.5. Logaritmi naturali ai numerelor de la 1,00 la 9,99

Tabela se folosește simplu. De exemplu, să se afle  $\ln 2,37$ . La intersecția liniei 2,3 cu coloana lui 7 se găsește logaritmul căutat: 0,8629.

Combinată cu tabela 2.6 (logaritmi naturali ai puterilor lui 10), această tabelă poate fi folosită și pentru aflarea logaritmilor naturali ai altor numere care nu figurează în 2.3,

*Exemplul 1.* Să se afle în 734. Avem

$$\begin{aligned} \ln 734 &= \ln 7,34 + \ln 10^2 = 1,9933 + 4,6051702 \approx \\ &\approx 1,9933 + 4,6052 = 6,5985. \end{aligned}$$

*Exemplul 2.* Să se afle  $\ln 0,00431$ . Avem

$$\begin{aligned} \ln 0,00431 &= \ln 4,31 - \ln 10^3 = 1,4609 - 6,9077553 \approx \\ &\approx 1,4609 - 6,9078 = -5,4469. \end{aligned}$$

#### Tabela 2.6. Logaritmi naturali ai puterilor lui 10

Modul de folosire al acestei tabele este evident (vezi și indicația pentru utilizarea tabelei II.2).

#### Tabela 2.7. Multiplii lui 1/M pentru transformarea logaritmilor zecimali în logaritmi naturali

În tabelă n au fost trecuți multiplii de la 1 la 9 ai lui 1/M, întrucît se pot deduce ușor din multiplii 10, 20, 30 etc. prin simpla mutare a virgulei spre stînga, peste o cifră. Modul de folosire este imediat.

*Exemplu.* Să se afle  $\ln N$  știind că  $\lg N = 0,13217$ . Se știe că

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N,$$

adică, în cazul nostru,

$$\ln N = \frac{1}{M} \times 0,13217,$$

sau

$$\ln N = \frac{1}{M} \times 0,13 + \frac{1}{M} \times 0,0021 + \frac{1}{M} \times 0,00007,$$

care se mai poate scrie

$$\ln N = \frac{1}{M} \times 13 \times \frac{1}{100} + \frac{1}{M} \times 21 \times \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{M} \times 7 \times \frac{1}{100\,000}.$$

Căutând în tabelă multiplii 13, 21 și 7 ai lui  $\frac{1}{M}$ , obținem

$$\begin{aligned} \ln N &= 29,93\,361 \times \frac{1}{100} + 48,35\,429 \times \frac{1}{10\,000} + 16,118\,096 \times \frac{1}{100\,000} = \\ &= 0,29\,934 + 0,00\,484 + 0,00\,016 = 0,30\,434. \end{aligned}$$

**Tabela 2.8.** Multiplii modului  $M$  pentru transformarea logaritmulor naturali în logaritmi zecimali

În tabelă n-au fost trecuți multiplii de la 1 la 9 ai lui  $M$ , deoarece se pot deduce cu ușurință din multiplii 10, 20, 30 etc., prin mutarea virgulei spre stânga peste o cifră. Modul de folosire este imediat,

*Exemplu.* Să se afle  $\lg N$  știind că  $\ln N = 1,24514$ . Se știe că

$$\lg N = M \ln N,$$

în cazul nostru

$$\lg N = M \times 1,24514.$$

Această egalitate se mai poate scrie

$$\begin{aligned} \lg N &= M \times 1,2 + M \times 0,045 + M \times 0,00014 = \\ &= M \times 12 \times \frac{1}{10} + M \times 45 \times \frac{1}{1\,000} + M \times 14 \times \frac{1}{100\,000}. \end{aligned}$$

Căutând în tabelă multiplii 12,45 și 14 ai lui  $M$ , obținem

$$\begin{aligned} \lg N &= 5\,21153 \times \frac{1}{10} + 19,54325 \times \frac{1}{1\,000} + 6,08012 \times \frac{1}{100\,000} = \\ &= 0,52115 + 0,01954 + 0,00006 = 0,54075. \end{aligned}$$

**Tabela 2.9.** Valorile funcțiilor  $e^x$  și  $e^{-x}$  pentru  $x \in [0, 10]$

Această tabelă conține valorile funcțiilor  $e^x$  și  $e^{-x}$ ,  $x$  variind de la 0 la 10. Valorile lui  $x$  merg din sutime în sutime de la 0 până la 4 și din zecime în zecime de la 4 la 10. Tabela se folosește prin citirea directă.

### 3. GEOMETRIE

#### 3.1. Geometrie plană

##### 3.1.1. Teoreme și relații în triunghiuri, patrulatere și poligoane oarecare

1) **Triunghiul dreptunghic** (fig. 3.1). *Notații:*  $a$  — lungimea ipotenuzei;  $b, c$  — lungimile catetelor;  $S$  — aria;  $\overline{AD}$  — înălțime;  $\overline{AE}$  — mediană;  $r$  — raza cercului înscris;  $R$  — raza cercului circumscris).

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (teorema lui Pitagora)}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{DB} \text{ (teorema înălțimii)}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC} \text{ (teorema catetei)}$$

$$S = bc/2; a = 2R; \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} / \overline{BC}$$

$$\overline{EA} = \overline{EB} = \overline{EC}$$

$$b + c = 2r + a$$

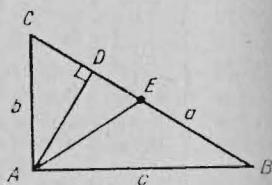


Fig. 3.1

##### 2) Triunghiul oarecare

*Notații* (fig. 3.2):  $a, b, c$  — lungimile laturilor;  $h_a$  — lungimea înălțimii ce pleacă din vârful  $A$ ;  $p = (a + b + c)/2$  — semiperimetrul;  $R$  — lungimea razei cercului circumscris;  $O$  — centrul cercului circumscris;  $r$  — lungimea razei cercului înscris;  $I$  — centrul cercului înscris;  $r_a, r_b, r_c$  — lungimile razelor cercurilor exinscrise;  $m_a$  — lungimea mediane dusă din vârful  $A$ ;  $\overline{AE} = i_a =$  — lungimea bisectoarei interioare a unghiului  $A$ ;  $i'_a$  — lungimea bisectoarei exterioare a unghiului  $A$ ;  $S$  — aria;  $s = (m_a + m_b + m_c)/2$ ;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \text{ (teorema lui Pitagora generalizată)}$$

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \quad i'_a = \frac{2}{b - c} \sqrt{bc(p - b)(p - c)} \quad (a > b > c,$$

lung. bis. ext.);

$$i_a = \frac{2}{b + c} \sqrt{pbc(p - a)} = \frac{h_a}{\cos \frac{B - C}{2}} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c};$$

$$i_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b + c)^2};$$

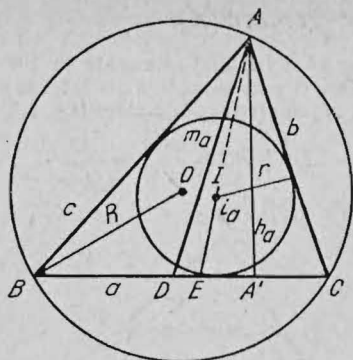


Fig. 3.2

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{ah_a}{2} = \frac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a = \sqrt{r r_a r_b r_c} = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \\
 &= p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{bc \sin A}{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2 \sin A} = \frac{h_a^2 \sin B}{2 \sin A \sin C} = \\
 &= r^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{4}{3} \sqrt{s(s-m_a)(s-m_b)(s-m_c)};
 \end{aligned}$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}; \quad r_a = S/(p-a) = p \operatorname{tg} (A/2).$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{c}{b}; \quad \overline{BE} = \frac{ac}{b+c}, \quad \overline{EC} = \frac{ab}{b+c} \quad (\text{teorema bisectoarei});$$

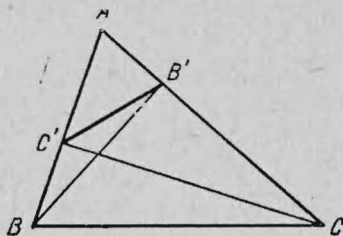


Fig. 3.3

$$\overline{B'C'} = a \cos A \quad (\overline{B'C'} - \text{lungimea unei anti-paralele}) \quad (\text{fig. 3.3})$$

### 3.1.2. Teoreme remarcabile

1) Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu  $180^\circ$ .

2) **Teorema lui Thales.** O paralelă la una din laturile unui triunghi împarte celelalte două laturi în segmente proporționale: (fig. 3.4):

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

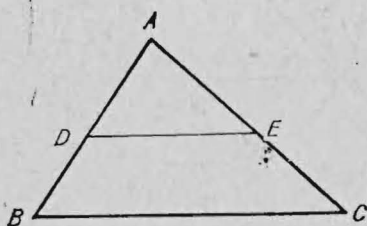


Fig. 3.4

3) **Teorema bisectoarei.** Bisectoarele (interioară și cea exterioră) unui unghi dintr-un triunghi împart respectiv latura opusă în segmente proporționale cu celelalte două laturi (fig. 3.5):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

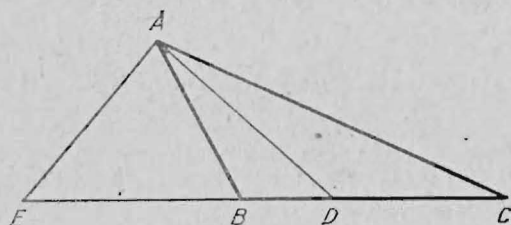


Fig. 3.5

4) **Teorema lui Stewart.** Dacă  $A$ ,  $B$  și  $C$  sînt trei puncte coliniare, în această ordine, iar  $O$  este un punct exterior dreptei pe care se află cele trei puncte, atunci avem (fig. 3.6):

$$\overline{OA}^2 \cdot \overline{BC} - \overline{OB}^2 \cdot \overline{AC} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}.$$

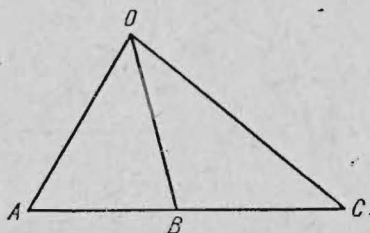


Fig. 3.6

5) **Teorema lui Menelaus:** Dacă pe laturile  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  ale unui triunghi  $ABC$  luăm trei puncte  $M$ ,  $N$ ,  $P$  care verifică relația (fig. 3.7):

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1,$$

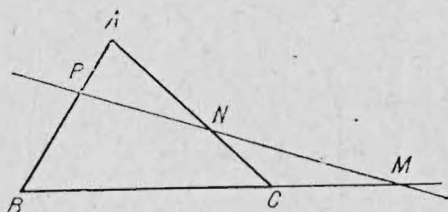


Fig. 3.7

atunci aceste trei puncte sînt coliniare.

6) **Teorema lui Ceva.** Dacă pe laturile unui triunghi  $ABC$  luăm trei puncte  $M$ ,  $N$ ,  $P$  astfel încît să avem relația (fig. 3.8):

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1,$$

atunci dreptele  $AM$ ,  $BN$  și  $CP$  sînt concurente.

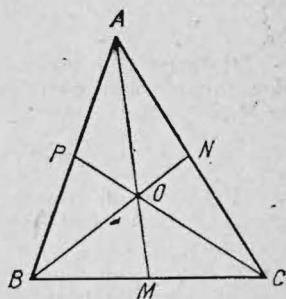


Fig. 3.8

7) **Teorema lui Pompeiu.** Dacă în planul unui triunghi echilateral  $ABC$  luăm un punct  $I$ , atunci cu segmentele  $\overline{IA}$ ,  $\overline{IB}$  și  $\overline{IC}$  se poate construi un triunghi (care poate fi eventual degenerat).

8) Distanța  $l$  dintre centrul  $O$  al cercului circumscris unui triunghi și centrul  $I$  al cercului înscris în același triunghi este

$$l = \sqrt{R^2 - Rr}.$$

9) **Teorema lui Nagel.** Dacă  $O$  este centrul cercului circumscris unui triunghi  $ABC$ , atunci  $AO$ ,  $BO$  și  $CO$  sînt perpendiculare pe laturile triunghiului ortic.

10) Dacă înălțimile triunghiului intersectează cercul circumscris în  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , atunci  $A$  este mijlocul arcului  $\widehat{B'C'}$  etc.

11) **Cercul lui Euler** (cercul celor 9 puncte). Dacă  $ABC$  este un triunghi, atunci picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ , unde  $H$  este ortocentrul triunghiului, sînt conciclice. Raza cercului lui Euler este  $R/2$ .

12) **Postulatul lui Euclid.** Fiind date un punct  $A$  și o dreaptă  $d$ , care nu trece prin  $A$ , există o singură paralelă la  $d$  care trece prin  $A$ .



13) **Dreapta lui Simson.** Dacă dintr-un punct  $M$  al cercului circumscris triunghiului  $ABC$  se coboară perpendicularele  $MD, ME, MF$  pe  $BC, CA$  și  $AB$ , atunci punctele  $D, E, F$  sint coliniare (fig. 3.9).

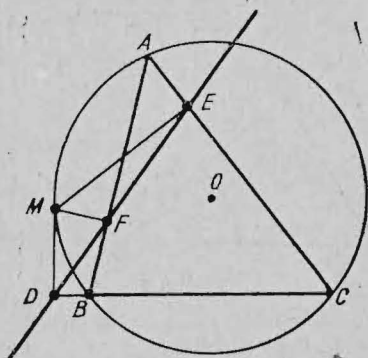


Fig. 3.9

14) **Teorema lui Steiner:** Dacă prin vârful  $A$  al triunghiului  $ABC$  ducem două drepte simetrice față de bisectoarea unghiului  $A$ , care întilnesc latura  $BC$  în  $M$  și  $N$ , atunci avem

$$\overline{AB^2} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{CN} = \overline{AC^2} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{BN}.$$

15) **Inegalitățile triunghiului.** Cu segmentele  $a, b, c$  se poate construi un triunghi dacă și numai dacă  $a < b + c, b < c + a, c < a + b$  sau  $|b - c| < a < b + c$ .

16) Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sint concurente în centrul cercului înscris în triunghi.

17) Mediatoarele laturilor unui triunghi sint concurente în centrul cercului circumscris triunghiului.

18) Medianele unui triunghi sint concurente în centrul de greutate al triunghiului.

19) Înălțimile unui triunghi sint concurente în ortocentrul triunghiului.

20) Un unghi exterior al unui triunghi este egal cu suma celor două unghiuri ale triunghiului, care nu-i sint alăturate.

21) Într-un triunghi cu două laturi neegale, laturii cu lungimea mai mare i se opune unghiul mai mare și reciproc.

22) Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralel cu a treia latură și este egal cu jumătate din aceasta.

23) Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare al acestora.

3) **Paralelogramul** (fig. 3.10)  $a, b$  lungimile laturilor,  $d_1, d_2$  = lungimile diagonalelor,  $\varphi$  = unghiul diagonalelor,  $h$  = lungimea înălțimii,  $S$  = aria  
 $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$  (teorema paralelogramului)

$$S = ah = ab \sin B = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}.$$

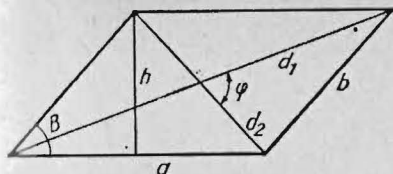


Fig. 3.10

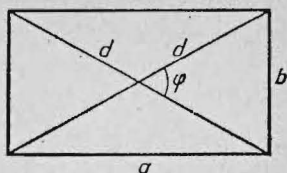


Fig. 3.11

4) Dreptunghiul (fig. 3.11) ( $a, b$  – lungimile laturilor;  $d$  – lungimea diagonalei;  $\varphi$  – unghiul diagonalelor;  $S$  = aria)

$$S = ab = \frac{d^2 \sin \varphi}{2}$$

5) Pătratul (fig. 3.12) ( $a$  – lungimea laturii;  $D = 2R$  = lungimea diagonalei;  $R$  – lungimea razei cercului circumscris;  $S$  – aria)

$$S = a^2 = \frac{D^2}{2} = 2R^2$$

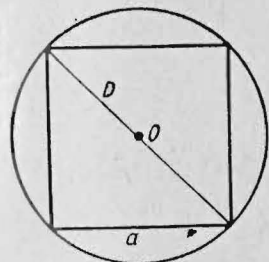


Fig. 3.12

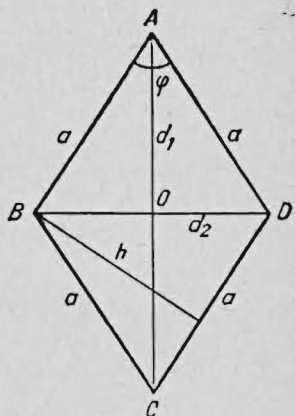


Fig. 3.13

6) Rombul (fig. 3.13) ( $a$  – lungimea laturii;  $d_1, d_2$  – lungimile diagonalelor;  $\varphi$  – unghiul dintre laturile  $AB$  și  $AD$ ;  $h$  – lungimea înălțimii;  $S$  – aria)

$$S = a^2 \sin \varphi = \frac{d_1 d_2}{2} = ah$$

7) Trapezul oarecare (fig. 3.14)  $a = \overline{AB}$  – lungimea bazei mari;  $b = \overline{DC}$  – lungimea bazei mici;  $h$  – lungimea înălțimii;  $\overline{GH}$  – linia mijlocie;  $d_1, d_2$  – lungimile diagonalelor;  $\varphi$  – unghiul diagonalelor;  $O$  – punctul de intersecție a diagonalelor;  $S$  – aria

$$\overline{OE} = \overline{OF}; \quad \overline{GH} = (a + b)/2; \quad \overline{PQ} = (a - b)/2;$$

$$S = \frac{(a + b)h}{2} = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}; \quad d_1^2 + d_2^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{DC}$$

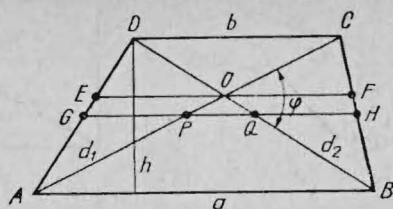


Fig. 3.14

8) Patrulaterul inscribitil (fig. 3.15) ( $a, b, c, d$  — lungimile laturilor  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — unghiurile patrulaterului;  $p$  — semiperimetrul;  $d_1, d_2$  — lungimile diagonalelor;  $S$  — aria)

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ; \quad \hat{B}_1 = \hat{A}_2 \text{ etc.}$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 \cdot d_2 &= ac + bd \\ \frac{d_1}{d_2} &= \frac{ab + cd}{ad + bc} \end{aligned} \right\} \text{Teoremele lui Ptolemeu}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$$

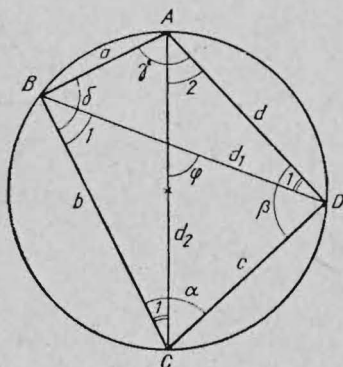


Fig. 3.15

9) Poligonul carecare (fig. 3.16).

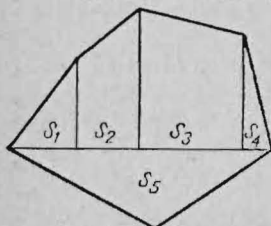


Fig. 3.16

Poligonul se descompune în triunghiuri și trapeze. Aria sa,  $S$ , este suma ariilor parțiale  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ ;

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5;$$

ariile parțiale se calculează cu formulele cunoscute.

10) **Patrulaterul oarecare. Teorema lui Euler.** În orice patrulater suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor, plus de patru ori pătratul lungimii segmentului care unește mijloacele diagonalelor.

11) **Poligonul regulat cu  $n$  laturi înscris într-un cerc de rază  $R$**  (fig. 3.17)

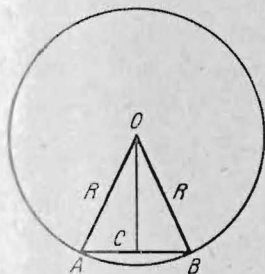


Fig. 3.17

$$\sphericalangle ACB = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

$$\text{Latura: } \overline{AB} = 2R \cos \frac{\pi}{n}$$

$$\text{Aria: } S_n = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

12) **Suma unghiurilor unui poligon convex oarecare cu  $n$  laturi este  $U = (n-2) \cdot 180^\circ = (n-2)\pi$ .**

### 3.1.3. Cercul

( $R$  = lungimea razei cercului;  $L$  = lungimea cercului;  $l$  = lungimea arcului de  $\alpha$  radiani;  $S$  = aria cercului).

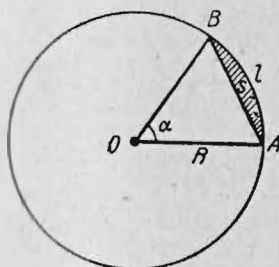


Fig. 3.18

$$l = R\alpha;$$

$$L = 2\pi R; \quad S = \pi R^2$$

$$\text{Aria sectorului } AOB = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Aria segmentului  $s$  = aria sectorului  $AOB$  - aria triunghiului  $AOB$ .

$$\text{Aria unei coroane circulare} = \pi(R^2 - r^2).$$

**Teoreme remarcabile referitoare la cerc.**

1) În același cerc sau în cercuri egale, la unghiuri la centru egale corespund arce și coarde egale și reciproc.

2) Diametrul perpendicular pe o coardă a cercului împarte coarda și arcele corespunzătoare în cîte două părți egale și reciproc.

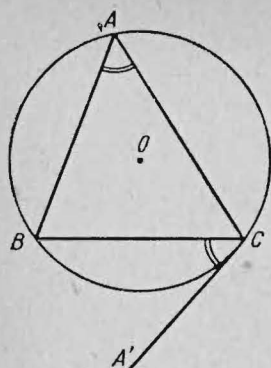


Fig. 3.19

3) În același cerc sau în cercuri egale, la arce egale corespund coarde egale și reciproc.

4) Arcele cuprinse între două coarde paralele sînt egale.

5) În același cerc sau în cercuri egale, coardele egale sînt egal depărtate de centru și reciproc.

6) Dacă  $ABC$  este un triunghi înscris într-un cerc și  $CA'$  este o semitangentă în  $C$ , atunci  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA'$  și reciproc (fig. 3.19).

### 3.1.4. Locuri geometrice fundamentale

1) Locul geometric al punctelor egal depărtate de extremitățile unui segment de dreaptă este *mediatoarea* aceluia segment.

2) Locul geometric al punctelor interioare unui unghi egal depărtate de laturile sale este *bisectoarea* aceluia unghi.

3) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este reprezentat de *bisectoarele unghiurilor* formate de cele două drepte.

4) Locul geometric al punctelor situate la o distanță dată de o dreaptă dată este reprezentat de două drepte paralele cu dreapta dată.

5) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct dat este un *cerc*.

6) Locul geometric al punctelor din care un segment de dreaptă se vede sub un unghi dat este reprezentat de *două arce de cerc*, care au aceleași extremități ca și segmentul și sînt simetrice față de dreapta pe care este situat segmentul.

7) Locul geometric al punctelor din care un segment de dreaptă se vede sub un unghi drept este *cercul* ce are segmentul respectiv drept diametru.

8) Locul geometric al punctelor  $N$ , care împart într-un raport constant segmentele determinate de un punct fix  $A$  și de un punct mobil  $M$  de pe o dreaptă dată  $d$  este o paralelă la  $(d)$ , care împarte distanța de la  $A$  la  $(d)$  în același raport.

9) Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două drepte paralele este constant este reprezentat de două drepte paralele cu dreptele date.

10) Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant ( $\neq 1$ ) este un *cerc*.

11) Locul geometric al punctelor  $N$ , situate pe segmentele care unesc un punct fix  $A$  cu un punct  $M$  mobil pe o dreaptă  $(d)$  dată, astfel încît  $\overline{AN} \cdot \overline{AM} = k$  este un *cerc*, care trece prin  $A$  și are centrul pe perpendiculara dusă din  $A$  pe dreapta  $(d)$ .

12) Locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanțelor lor la două puncte date este constantă este un *cerc* cu centrul în mijlocul segmentului cu extremitățile în cele două puncte.

13) Locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte fixe este constantă este o *dreaptă perpendiculară* pe dreapta determinată de cele două puncte fixe.

14) Locul geometric al punctelor care au puteri egale față de două cercuri date este o *dreaptă*, anume *axa radicală* a celor două cercuri.

15) Locul geometric al punctelor de putere constantă față de un cerc dat este un *cerc* concentric cu cercul dat, un punct sau mulțimea vidă.

16) Locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix (numit focar) și de o dreaptă fixă (numită directoare) este o *parabolă*.

17) Locul geometric al punctelor ce au proprietatea că suma distanțelor lor la două puncte fixe (numite focare) este constantă este o *elipsă*.

18) Locul geometric al punctelor ce au proprietatea că diferența distanțelor lor la două puncte fixe (numite focare) este constantă este o *hiperbolă*.

*Observare foarte importantă:* Pentru a arăta că locul geometric al punctelor dintr-un plan  $\pi$ , care au anumită proprietate  $P$  este mulțimea de puncte  $L$ , trebuie să demonstrăm că au loc următoarele propoziții:

i) Orice punct al mulțimii  $L$  are proprietatea  $P$ ;

ii) Orice punct din planul  $\pi$  care are proprietatea  $P$  aparține mulțimii  $L$ .

### 3.1.5. Relații în poligoanele regulate înscrise într-un cerc

*Notății:*  $R$  = raza cercului circumscris;  $L_n$  = latura poligonului regulat convex cu  $n$  laturi;  $a_n$  = apotema poligonului regulat convex cu  $n$  laturi;  $L'_n$  = latura poligonului stelat cu  $n$  laturi;  $a'_n$  = apotema poligonului stelat cu  $n$  laturi;  $P_n$  = perimetrul poligonului regulat convex cu  $n$  laturi;  $S_n$  = aria poligonului regulat convex cu  $n$  laturi

*Relații:*

$$L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 + R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

$$S_n = \frac{P_n a_n}{2}$$

### 3.1.6. Folosirea tabelelor 3.1—3.3

**Tabela 3.1. Laturile, apotemele și ariile poligoanelor regulate în funcție de raza cercului circumscris**

Tabela se folosește prin citire directă: pe prima linie sînt trecute poligoanele regulate, iar pe celelalte trei lungimile laturilor, ale apotemelor și ariile respective poligoane în funcție de  $R$  (raza cercului circumscris).

**Tabela 3.2. Puteri, radicali, logaritmi naturali, valori reciproce, lungimi și arii de cercuri**

Tabela se folosește prin simpla citire a valorilor căutate; prima coloană conține numerele de la 1 pînă la 1 500, iar celelalte coloane, diferite puteri, radicali, logaritmi naturali etc., ai acestor numere.

**Tabela 3.3. Valori numerice importante (expresii în  $\pi$ ,  $g$  și  $e$ )**

Modul de utilizare este evident. În coloana a treia și a șasea sînt dați logaritmi zecimali ai numerelor din coloana a doua și a cincea.

Tabela 3.1 Laturile, apotemele și ariile poligoanelor regulate în funcție de raza  $R$  a cercului circumscris

Poligonul regulat Elementele	Triunghiul echilateral ( $n=3$ )	Pătratul ( $n=4$ )	Pentagonul convex ( $n=5$ )	Pentagonul stelat ( $n=5$ )	Hexagonul ( $n=6$ )
Latura ( $L_n$ sau $L'_n$ )	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{10-2\sqrt{5}}/2$	$R\sqrt{10+2\sqrt{5}}/2$	$R$
Apotema ( $a_n$ sau $a'_n$ )	$R/2$	$R\sqrt{2}/2$	$R(\sqrt{5}+1)/4$	$R(\sqrt{5}-1)/4$	$R\sqrt{3}/2$
Aria ( $S_n$ )	$3R^2\sqrt{3}/4$	$2R^2$	$\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$		$3R^2\sqrt{3}/2$

Tabelul 3.1 (continuare)

Poligonul regulat Elementele	Octogonul convex ( $n=8$ )	Octogonul stelat ( $n=8$ )	Decagonul convex ( $n=10$ )	Decagonul stelat ( $n=10$ )	Dodecagonul convex ( $n=12$ )	Dodecagonul stelat ( $n=12$ )
Latura ( $L_n$ sau $L'_n$ )	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$R\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$R(\sqrt{5}-1)/2$	$R(\sqrt{5}+1)/2$	$R(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$	$R(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$
Apotema ( $a_n$ sau $a'_n$ )	$R\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$	$R\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$	$R\sqrt{10-2\sqrt{5}}/4$	$R(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$R(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$
Aria ( $S_n$ )	$2\sqrt{2}R^2$		$\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$		$3R^2$	

Tabela 3.3. Valori numerice importante  
(expresii în  $\pi$ ,  $g$  și  $e$ )

	$n$	$\ln n$		$n$	$\ln n$
$\pi$	3,1415 93	0,49715	$1: \pi$	0,3183 10	$\bar{1},50285$
$2\pi$	6,2831 85	0,79818	$1: 2\pi$	0,1591 55	$\bar{1},20182$
$3\pi$	9,4247 78	0,97427	$1: 3\pi$	0,1061 03	$\bar{1},02573$
$4\pi$	12,5663 71	1,09921	$1: 4\pi$	0,0795 77	$\bar{2},90079$
$\pi: 2$	1,5707 96	0,19612	$2: \pi$	0,6366 20	$\bar{1},80388$
$\pi: 3$	1,0471 98	0,02003	$3: \pi$	0,9549 30	$\bar{1},97997$
$\pi: 4$	0,7853 98	$\bar{1},89509$	$4: \pi$	1,2732 40	0,10491
$\pi: 6$	0,5235 99	$\bar{1},71900$	$6: \pi$	1,0098 59	0,28100
$n: 180 (= 1^\circ)$	0,0174 53	$\bar{2},24188$	$180^\circ: \pi$	$57^\circ,2957 80$	1,75812
$\pi: 10\ 800 (= 1')$	0,0002 91	$\bar{4},46373$	$10\ 800': \pi$	$3437',74 68$	3,53627
$\pi: 648\ 000 (= 1'')$	0,0000 05	$\bar{6},68557$	$648\ 000'': \pi$	$206264'',81$	5,31443
$\pi^2$	9,8696 04	0,99430	$1: \pi^2$	0,1013 21	$\bar{1},00570$
$\sqrt{\pi}$	1,7724 54	0,24857	$\sqrt{1: \pi}$	0,5641 90	$\bar{1},75143$
$\sqrt{2\pi}$	2,5066 28	0,39909	$\sqrt{1: 2\pi}$	0,3989 42	$\bar{1},60091$
$\sqrt{\pi: 2}$	1,2533 14	0,09806	$\sqrt{2: \pi}$	0,7978 85	$\bar{1},90194$
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645 92	0,16572	$\sqrt[3]{1: \pi}$	0,6827 84	$\bar{1},83428$
$\sqrt[3]{4\pi: 3}$	1,6119 92	0,20736	$\sqrt[3]{3: 4\pi}$	0,6203 50	$\bar{1},79264$
$e$	2,7182 82	0,43429	$1: e$	0,3678 79	$\bar{1},56571$
$e^2$	7,3890 56	0,86859	$1: e^2$	0,1353 35	$\bar{1},13141$
$\sqrt{e}$	1,6487 21	0,21715	$\sqrt{1: e}$	0,6065 31	$\bar{1},78285$
$\sqrt[3]{e}$	1,3956 12	0,14476	$\sqrt[3]{1: e}$	0,7165 32	$\bar{1},85524$
$e\pi: 2$	4,8104 77	0,68219	$e-\pi: 2$	0,2078 80	$\bar{1},31781$
$e^\pi$	23,1406 93	1,36438	$e^{-\pi}$	0,0432 14	$\bar{2},63562$
$e^{2\pi}$	535,4916 56	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,0018 67	$\bar{3},27125$
$C^1)$	0,5772 16	$\bar{1},76134$	$\ln \pi$	1,1447 30	0,05870
$M = \lg e$	0,4342 94	$\bar{1},63778$	$1: M = \ln 10$	2,3025 85	0,36222
$g^2)$	9,81	0,99167	$1: g$	0,10194	$\bar{1},00833$
$g^2$	96,2361	1,98334	$1: 2g$	0,050968	$\bar{2},70730$
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi \sqrt{g}$	9,83974	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi \sqrt{2g}$	13,91536	1,14359

1)  $C$  este constanta lui Euler;

2)  $g$  este accelerația gravitației în  $m/s^2$ ; aici este dată valoarea rotunjită a lui  $g$  la nivelul mării și la latitudinea  $45^\circ-50^\circ$ .



## 3.2. Geometria în spațiu

### 3.2.1. Teoreme remarcabile

1) Dacă o dreaptă din spațiu este paralelă cu o dreaptă conținută într-un plan atunci dreapta din spațiu este paralelă cu planul.

2) Dacă o dreaptă este paralelă cu două plane neparalele, atunci ea este paralelă cu dreapta lor de intersecție.

3) Dacă două drepte sînt perpendiculare pe același plan, atunci ele sînt paralele.

4) Dacă un plan este perpendicular pe două plane, atunci el este perpendicular și pe intersecția lor.

5) Dacă o dreaptă e perpendiculară pe un plan, atunci orice plan care trece prin această dreaptă este perpendicular pe planul inițial.

6) O dreaptă e perpendiculară pe un plan, dacă ea este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan.

7) Dacă proiecția unei oblice pe un plan e perpendiculară pe o dreaptă din plan, atunci și oblica însăși e perpendiculară pe acea dreaptă din plan.

8) Un plan intersectează două plane paralele după două drepte paralele.

9) Dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă conținută în unul din plane e paralelă cu celălalt plan.

10) *Teorema (proiecției) unghiului drept*: Proiecția unui unghi drept pe un plan paralel cu una din laturile lui este tot un unghi drept și reciproc.

11) *Teorema celor trei perpendiculare*: Dacă dintr-un punct  $A$  ducem perpendiculara  $AB$  pe planul  $(p)$ ,  $B \in p$ , iar din piciorul  $B$  ducem perpendiculara  $BC$  pe o dreaptă  $(d)$  situată în planul  $(p)$ , atunci  $AC$  este perpendiculară pe  $(d)$  (fig. 3.20).

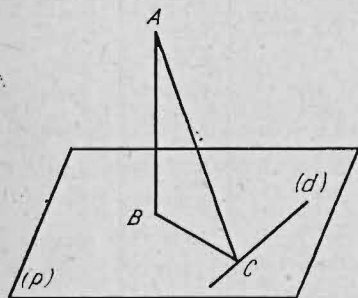


Fig. 3.20

*Reciproca 1.* Dacă  $AB$  este perpendiculară pe  $(p)$ ,  $B \in p$ , iar  $d \subset p$  și  $AC$  este perpendiculară pe  $d$ , cu  $C \in d$ , atunci  $BC$  este perpendiculară pe  $d$ .

*Reciproca 2.* Dacă  $BC$  este perpendiculară pe  $d$ , cu  $B \in p$ ,  $d \subset p$  și  $C \in d$ , și  $AC$  este perpendiculară pe  $d$ , iar  $AB$  este perpendiculară pe  $BC$ , atunci  $AB$  este perpendiculară pe planul  $p$ .

12) *Proiecția unui segment de dreaptă pe un plan*: Proiecția segmentului de dreaptă  $\overline{AB}$  pe un plan  $(P)$  se obține ducînd prin capetele  $A$  și  $B$  ale segmentului perpendiculare pe planul  $(P)$ , care îl intersectează în  $A'$  și  $B'$ . Planul generat de dreptele paralele  $AA'$  și  $BB'$  se numește *plan proiectant*. Se numește unghiul dreptei  $AB$  făcut cu planul  $(P)$  unghiul  $\varphi$  format de dreapta  $AB$  cu proiecția ei  $A'B'$  pe planul  $(P)$  și avem relația (fig. 3.21).

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \varphi.$$

13) *Teorema proiecției ariei, unui poligon plan pe un plan.*

Dacă un poligon  $P$  din planul  $(\pi)$  are aria  $S$  și dacă proiectăm ortogonal pe  $P$  pe un plan  $(\pi')$ , care face cu  $(\pi)$  unghiul ascuțit  $\varphi$ , atunci aria  $S'$  a lui  $P'$  este dată de

$$S' = S \cos \varphi.$$

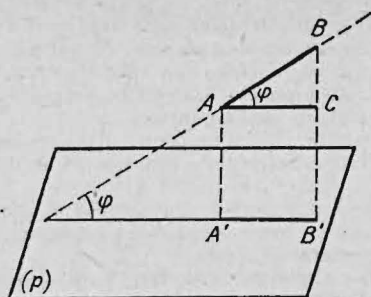


Fig. 3.21

14) Dacă proiecțiile poligonului plan  $P$  din planul  $(\pi)$ , de arie  $S$ , pe trei plane  $(\pi')$ ,  $(\pi'')$ ,  $(\pi''')$  perpendiculare două câte două sînt  $P'$ ,  $P''$  și  $P'''$  și au ariile  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$ , atunci

$$S^2 = (S')^2 + (S'')^2 + (S''')^2.$$

15) *Teorema secțiunii.* Raportul ariilor a două secțiuni prin plane perpendiculare pe înălțimea unei piramide-sau a unui con este egal cu pătratul raportului lungimilor înălțimilor corespunzătoare, iar raportul volumelor corpurilor cu acele secțiuni drept baze este egal cu cubul raportului lungimilor înălțimilor respective.

16) O prismă oblică este echivalentă cu o prismă dreaptă care are ca bază o secțiune dreaptă a prisme oblice, iar ca înălțime muchia laterală a prisme oblice.

### 3.2.2. Locuri geometrice fundamentale

1) Locul geometric al punctelor comune la două plane secante este *dreapta* de intersecție a planelor.

2) Locul geometric al punctelor egal depărtate de trei puncte necoliniare e o *dreaptă* perpendiculară pe planul determinat de cele trei puncte, în centrul cercului circumscris triunghiului format de ele.

3) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date este un *plan perpendicular* pe mijlocul segmentului determinat de cele două puncte.

4) Locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unui diedru este *semiplanul bisector* al diedrului.

5) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte concurente în  $O$  este reprezentat de cele două plane care trec prin perpendiculara pe planul celor două drepte în  $O$  și prin cele două bisectoare ale unghiurilor formate de cele două drepte concurente.

6) Locul geometric al punctelor egal depărtate de un plan este format din două *plane* paralele cu planul dat.

7) Locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele cu o direcție fixă, cuprinse între două plane fixe, paralele, este *planul paralel* cu planele date și egal depărtat de ele.

8) Locul geometric al dreptelor paralele cu un plan, duse printr-un punct exterior, e un *plan* care trece prin acest punct și e paralel cu planul dat.

9) Locul geometric al perpendicularelor duse dintr-un punct pe o dreaptă dată este un plan, perpendicular pe acea dreaptă.

10) Locul geometric al dreptelor mobile, care se sprijină pe o dreaptă fixă și care trec printr-un punct fix exterior dreptei fixe este un *plan*.

11) Locul geometric al dreptelor care trec printr-un punct fix și sînt paralele cu un plan fix este un *plan* paralel cu acest plan.

12) Locul geometric al punctelor din spațiu pentru care diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte fixe este constantă e un *plan* perpendicular pe dreapta care unește cele două puncte.

13) Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor lor la două plane paralele este constant este reprezentat de două *plane* paralele cu planele date.

14) Locul geometric al punctelor din planul ( $\pi$ ), din care un segment de dreaptă dat se vede sub un unghi drept este un *cerc* sau un *punct*, dacă în ( $\pi$ ) există puncte cu proprietatea cerută.

15) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix, numit centru, este o *sferă*.

16) Locul geometric al tangentelor unei sfere, paralele cu o dreaptă dată, e o suprafață cilindrică de rotație, circumscrisă sferei în lungul unui cerc mare.

17) Locul geometric al tangentelor duse unei sfere printr-un punct exterior e o suprafață conică de rotație, circumscrisă sferei în lungul unui cerc.

### 3.2.3. Ariile și volumele principalelor poliedre.

#### Razele sferelor înscrise sau circumscrise acestora

*Notății generale.*  $a, b, c$  — lungimile laturilor, muchiilor, dimensiunilor poliedrelor;  $d$  = lungimea diagonalei;  $P, p$  = perimetrele bazelor;  $A$  = apotemă;  $S, s$  = ariile bazelor;  $S_l$  = aria laterală;  $S_t$  = aria totală;  $I$  = înălțimea;  $V$  = volumul;  $r$  = lungimea razei sferei înscrise;  $R$  = lungimea razei sferei circumscrise,  $D$  = lungimea diametrului sferei circumscrise.

1) *Cubul* (fig. 3.22)

$$\begin{aligned} S_l &= 4a^2; & d &= a\sqrt{3}; \\ S_t &= 6a^2; & r &= a/2; \\ V &= a^3; & R &= d/2; \end{aligned}$$

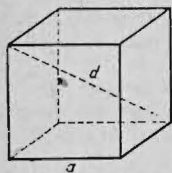


Fig. 3.22

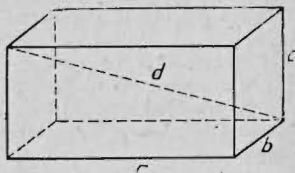


Fig. 3.23

2) *Paralelipipedul dreptunghic* (fig. 3.23)

$$\begin{aligned} S_l &= 2(ab + bc + ca) \\ V &= abc; \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ R &= d/2; \quad D = d \end{aligned}$$

3) *Paralelipipedul oarecare* (fig. 3.24)

$S_l$  = Suma ariilor paralelogramelor care formează suprafața laterală a paralelipipedului.

$$S_t = S_l + 2S$$

$$V = SI$$

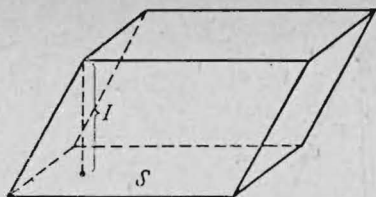


Fig. 3.24

4) *Prisma dreaptă sau oblică* (fig. 3.25)

$$S_l = P \cdot I \text{ (fig. 3.25, a)}; S_t = S_l + 2S$$

$$V = SI = \text{aria secțiunii drepte} \cdot \text{lungimea muchiei} \text{ (fig. 3.25, a, b)}$$

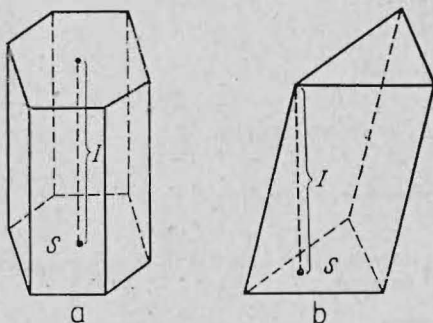


Fig. 3.25

5) *Piramida regulată* (fig. 3.26)

$$S_l = \frac{PA}{2}; S_t = S_l + S; V = \frac{SI}{3};$$

$$r = \frac{3V}{S_l + S}$$

Formula care dă volumul se aplică și în cazul unei piramide oarecare.

6) *Tetraedrul regulat* (fig. 3.27)

$$h = a \sqrt{\frac{2}{3}}, S_l = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4};$$

$$S_t = a^2\sqrt{3}; V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}; r_{sf. \text{ inscr.}} = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$R_{sf. \text{ circ}} = \frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

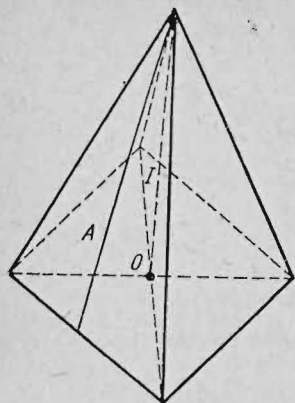


Fig. 3.26

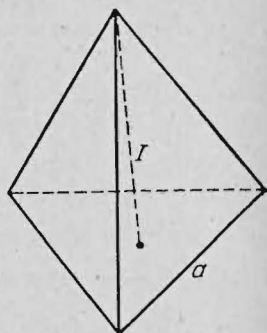


Fig. 3.27

7) Trunchiul de piramidă (fig. 3.28)

$$S_l = \frac{P + p}{2} A; S_t = S_l + S + s; V = \frac{I}{3} (S + s + \sqrt{Ss})$$

Formula care dă volumul se aplică și în cazul unui trunchi de piramidă, cu bazele paralele, oarecare.

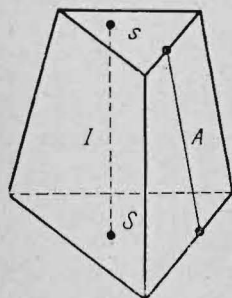


Fig. 3.28

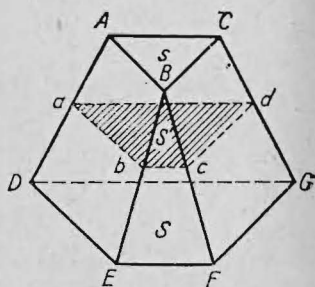


Fig. 3.29

8) Prismațoidul\* (fig. 3.29)

$s$  = aria  $ABC$ ;  $S$  = aria  $DEFG$ ;  $S'$  = aria  $abcd$ ;  $I$  = lungimea înălțimii;  
 $a, b, c, d$  mijloacele muchilor;  $V = \frac{I}{6} (S + 4S' + s)$  (formula lui Simson).

\* Prismațoidul este un poliedru care are ca baze două poligoane așezate în plane paralele, iar fețele laterale sînt trapeze sau triunghiuri.

### 3.2.4. Ariile și volumele principalelor corpuri rotunde

Notății generale.  $R, R_1, r$  = lungimile razelor;  $D, d$  = lungimi ale diametrelor;  $a, b, c$  = lungimile semiaxelor;  $G$  = lungimea generatoarei;  $I$  = lungimea înălțimii;  $S$  = aria;  $S_l$  = aria laterală;  $S_t$  = aria totală;  $V$  = volumul.

#### 1) Cilindrul circular drept (fig. 3.30)

$$S_l = 2\pi R G; S_t = 2\pi R(G + R); V = \pi R^2 I$$

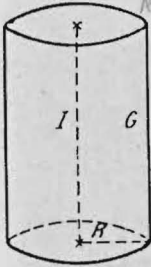


Fig. 3.30

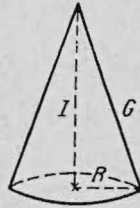


Fig. 3.31

#### 2) Conul circular drept (fig. 3.31)

$$S_l = \pi R G; S_t = \pi R(G + R); V = \frac{\pi R^2 I}{3};$$

$$r_{sf. \text{ inscr.}} = R \sqrt{\frac{G - R}{G + R}}; R_{sf. \text{ circ.}} = \frac{G^2}{2\sqrt{G^2 - R^2}}$$

#### 3) Trunchiul de con (fig. 3.32)

$$S_l = \pi G(R + r); S_t = S_l + \pi(R^2 + r^2); V = \frac{\pi I}{3} (R^2 + r^2 + Rr);$$

$$d = \sqrt{G^2 + 4Rr} \text{ (diagonala)} R_{sf. \text{ circ.}} = \frac{Gd}{2I}$$

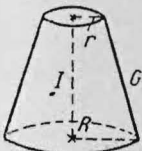


Fig. 3.32

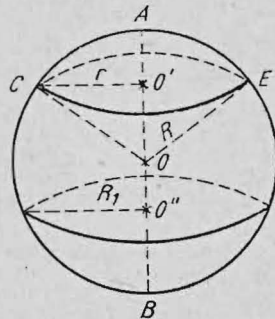


Fig. 3.33

4) Sfera (fig. 3.33)

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2; D = 2R; V = \frac{4\pi R^3}{3} = \pi \frac{D^3}{6}.$$

5) Zona sferică (fig. 3.33)

$$S = 2\pi RI, I = \overline{O'O''}; V = \frac{\pi I}{6} (3r^2 + 3R_1^2 + I^2)$$

6) Calota sferică (fig. 3.33)

$$S = 2\pi RI, I = \overline{O'A}; V = \frac{\pi I^2}{3} (3R - I) = \frac{\pi I}{6} (I^2 + 3r^2).$$

7) Sectorul sferic (de primul tip (fig. 3.34, a), de al doilea tip (fig. 3.34, b)):

$$S = 2\pi RI + \pi Rr \text{ (fig. 3.34, a); } V = \frac{2\pi R^2 I}{3} \text{ (fig. 3.34, a, b)}$$

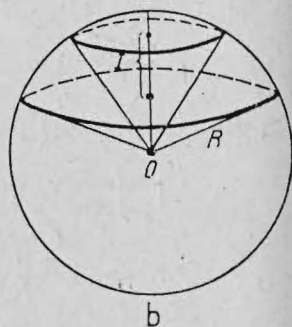
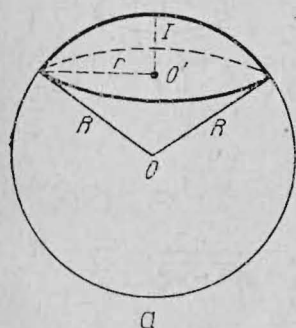


Fig. 3.34

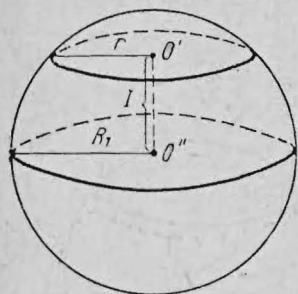


Fig. 3.35

8) Segmentul sferic cu două baze (fig. 3.35) (porțiunea de sferă cuprinsă între două plane paralele)

$$V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{I}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} (\pi R_1^2 I + \pi r^2 I).$$

9) Segmentul sferic cu o bază (fig. 3.36) (porțiunea de sferă mărginită de o calotă și un disc):

$$V = \frac{\pi I^2}{3} (3R - I).$$

10) **Elipsoidul:** (fig. 3.37)

$$V = \frac{4\pi abc}{3}.$$

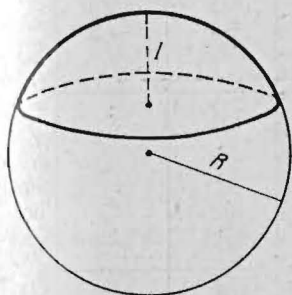


Fig. 3.36



Fig. 3.37

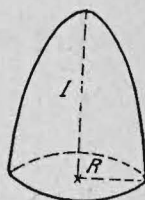


Fig. 3.38

11) **Paraboloidul de rotație:** (fig. 3.38)

$$V = \frac{\pi R^2 I}{2}.$$

12) **Torul (inel cilindric)** (fig. 3.39)

$S = 4\pi^2 Rr$ ,  $r$  = raza cercului generator;  $V = 2\pi^2 Rr^2$ .  $d = 2r$ ,  $D = 2R$ .

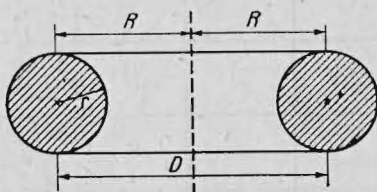


Fig. 3.39

### 3.2.5. Poliedre. Poliedre regulate

**Teorema lui Euler:** Dacă  $V$ ,  $M$  și  $F$  sînt numărul virfurilor, al muchiilor și al fețelor unui poliedru convex, atunci

$$V - M + F = 2.$$

Poliedrele regulate sînt: tetraedrul, hexaedrul sau cubul, octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul.

Principalele caracteristici ale acestor poliedre, printre care ariile laterale și volumele lor, în funcție de lungimea  $a$  a muchiei, sînt date mai jos:



Poliedrul regulat	Felul fețelor	Numărul fețelor	Numărul vîrfurilor	Numărul muchiilor	Aria	Volumul	Raza sferei circumscrise, $R$	Raza sferei inscrise, $r$
1 Tetraedrul	Triunghiuri echilaterale	4	4	6	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$
2 Cubul	Pătrate	6	8	12	$6a^2$	$a^3$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
3 Octaedrul	Triunghiuri echilaterale	8	6	12	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
4 Dodecaedrul	Pentagoane regulate	12	20	30	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{10}}{20}(25+11\sqrt{5})$
5 Icosaedrul	Triunghiuri echilaterale	20	12	30	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$

Dacă  $R$  este raza sferei circumscrise,  $r$  raza sferei înscrise și  $\rho$  raza cercului circumscris unei fețe, atunci avem (în cazul icosaedrului și dodecaedrului):

$$r = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \cdot R; \quad \rho = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}} \cdot R.$$

### 3.2.6. Cîteva volume uzuale

#### 1. Cotitul butoaielor:

*Notații generale.*  $R$  = raza secțiunii butoiului prin vrană;  $D$  = diametrul secțiunii butoiului prin vrană;  $r$  = raza mijlocie a fundurilor;  $d$  = diametrul mijlociu al fundurilor;  $I$  = înălțimea butoiului.

Capacitatea butoaielor se calculează cu formulele aproximative.

$$a) V = \pi \left( \frac{2D + d}{6} \right)^2 \cdot I;$$

$$b) V = 0,8 IDd;$$

$$c) V = \pi I \left( R - \frac{3(R-r)}{8} \right)^2 \quad (\text{formula lui Dez});$$

$$d) V = \frac{\pi I}{3} (2R^2 + r^2) \quad (\text{formula lui Oughtul}).$$

#### 2. Cubajul trunchiurilor de arbori. a) Trunchiul de arbore cilindric

$C$  = lungimea cercului de bază;  $I$  = înălțimea trunchiului;  $V$  = volumul.

$$V = \frac{\left( \frac{C}{2} \right)^2 I}{\pi}$$

#### b) Trunchiul de arbore care are forma unui trunchi de con

$C$  = lungimea cercului măsurată pe arbore la jumătatea lui;  $I$  = înălțimea arborelui;  $V$  = volumul.

$$V = \frac{\left( \frac{C}{2} \right)^2 I}{\pi}$$

3. Calculul debitului de apă al unui riu. În construcțiile de poduri și hidrocentrale e necesar să cunoaștem debitul volumic de apă al unui riu, adică volumul de apă pe care îl dă riul într-un minut.

Acest volum se asimilează cu cel al unei prisme avînd ca bază o secțiune făcută în riu, printr-un plan normal pe direcția sa, și ca înălțime distanța parcursă de apă într-un minut.

Dacă secțiunea are aspectul din fig. 3.40, se procedează astfel. De a lungul orizontalei  $AB$ , perpendicular pe cursul apei, în punctele  $C, D, E, \dots$  se fac sonde și se determină adîncimea riuului.

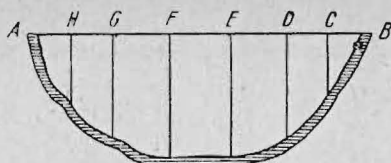


Fig. 3.40

Se calculează aria  $S$  a secțiunii, adunând ariile triunghiurilor și trapezelor astfel formate. Pentru a afla înălțimea  $I$  a prismei, se determină ce distanță parcurge o bucată de lemn plutitor într-un minut. Acum debitul volumic va fi  $D = SI$ .

*Observare:* Problemele de geometrie se împart, în principal, în probleme de calcul (a unor elemente ale unor figuri geometrice), de demonstrație (a unor proprietăți ale unor figuri geometrice), de maxim și minim, de locuri geometrice și de construcție.

### 3.2.7. Folosirea tabelii 3.4

Tabela 3.4. Factorul corespunzător raportului  $h/d$  pentru calculul conținutului de lichid în cilindri orizontali

Volumul cilindrilor (cisternelor), care nu sînt plini cu lichid, se calculează cu ajutorul ariei segmentului de cerc udat de lichid și al lungimii cilindrului. Practic, însă, pentru cilindrii orizontali se consideră că lichidul cu nivelul  $h$  are volumul egal cu produsul dintre volumul total al cilindrului și factorul corespunzător raportului  $h/d$ , în care  $d$  este diametrul cilindrului. În tabelă este dată valoarea acestui factor în funcție de valoarea raportului  $h/d$ .

Tabela 3.4. Factorul corespunzător raportului  $h/d$  pentru calculul conținutului de lichid în cilindri orizontali

$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.
0,01	0,0017	0,21	0,1527	0,41	0,3860	0,61	0,6389	0,81	0,8677
0,02	0,0048	0,22	0,1631	0,42	0,3986	0,62	0,6513	0,82	0,8776
0,03	0,0087	0,23	0,1738	0,43	0,4112	0,63	0,6636	0,83	0,8873
0,04	0,0134	0,24	0,1845	0,44	0,4238	0,64	0,6759	0,84	0,8967
0,05	0,0187	0,25	0,1955	0,45	0,4364	0,65	0,6881	0,85	0,9059
0,06	0,0245	0,26	0,2066	0,46	0,4491	0,66	0,7002	0,86	0,9146
0,07	0,0308	0,27	0,2178	0,47	0,4618	0,67	0,7122	0,87	0,9236
0,08	0,0375	0,28	0,2292	0,48	0,4745	0,68	0,7241	0,88	0,9326

$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.	$\frac{h}{d}$	fact.
0,09	0,0446	0,29	0,2407	0,49	0,4873	0,69	0,7360	0,89	0,9402
0,10	0,0520	0,30	0,2525	0,50	0,5000	0,70	0,7477	0,90	0,9480
0,11	0,0598	0,31	0,2640	0,51	0,5127	0,71	0,7593	0,91	0,9554
0,12	0,0689	0,32	0,2759	0,52	0,5255	0,72	0,7708	0,92	0,9625
0,13	0,0764	0,33	0,2878	0,53	0,5382	0,73	0,7822	0,93	0,9692
0,14	0,0851	0,34	0,2998	0,54	0,5509	0,74	0,7934	0,94	0,9755
0,15	0,0941	0,35	0,3119	0,55	0,5636	0,75	0,8045	0,95	0,9813
0,16	0,1033	0,36	0,3241	0,56	0,5762	0,76	0,8155	0,96	0,9866
0,17	0,1127	0,37	0,3364	0,57	0,5888	0,77	0,8262	0,97	0,9913
0,18	0,1224	0,38	0,6487	0,58	0,6014	0,78	0,8369	0,98	0,9952
0,19	0,1323	0,39	0,3611	0,59	0,6140	0,79	0,8473	0,99	0,9983
0,20	0,1424	0,40	0,3735	0,60	0,6265	0,80	0,8576	1,00	1,0000

### 3.3. Geometrie analitică

#### 3.3.1. Vectori

- 1) Notății:  $\vec{AB}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}(x, y, z)$ ,  $\vec{v}_1(a_1, b_1, c_1)$ .
- 2) Lungimea unui vector:  $|\vec{AB}|$ ;  $AB$ ;  $|\vec{a}|$ ;  $a$ ;  $|\vec{v}|$ ;  $v$ ;  $|\vec{v}_1|$ ;  $v_1$ .
- 3) Adunarea vectorilor:  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  (regula triunghiului, fig. 3.41)  
 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$  (regula paralelogramului, fig. 3.42)

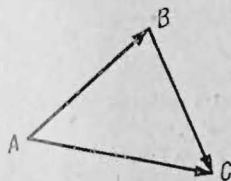


Fig. 3.41

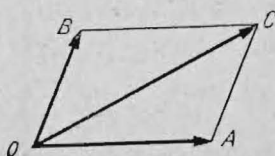


Fig. 3.42

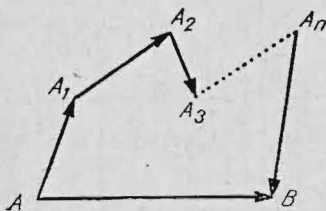


Fig. 3.43

$$\vec{AA_1} + \vec{A_1A_2} + \dots + \vec{A_nB} = \vec{AB} \text{ (regula poligonului, fig. 3.43)}$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} \text{ (regula paralelipipedului, fig. 3.44)}$$

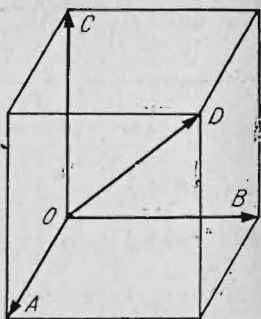


Fig. 3.44

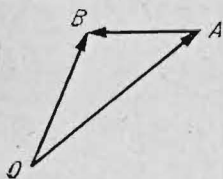


Fig. 3.45

4) Scăderea vectorilor:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB} \text{ (fig. 3.45)}$$

5) Criteriul de coliniaritate a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0}, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

6) Proprietățile adunării vectorilor și ale înmulțirii cu scalari (din  $\mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$  a vectorilor)

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$2) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

$$4) (\lambda \mu) \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = \lambda \mu \vec{a}$$

$$5) (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$6) \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

$$7) 0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

7) Forma hipercomplexă a vectorilor:

1) Fie  $A(a_1, b_1, c_1)$  și  $B(a_2, b_2, c_2)$  două puncte date: atunci

$$\vec{AB} = (a_2 - a_1) \vec{i} + (b_2 - b_1) \vec{j} + (c_2 - c_1) \vec{k}, \text{ respectiv}$$

$$AB = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

2) Fie  $\vec{a} = (a_1, b_1, c_1)$  și  $\vec{b} = (a_2, b_2, c_2)$  doi vectori dați; atunci

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2, c_1 \pm c_2); \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1)$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \text{ (lungimea lui } \vec{a} \text{)}$$

8) Versorul vectorului  $\vec{a}(a_1, b_1, c_1)$ .

$$\frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \vec{i} + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \vec{j} + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \vec{k}$$

9) Produsul scalar a doi vectori  $\vec{a}, \vec{b}$ :

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi, \varphi = \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b});$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

$$3) \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

Proprietăți: 1.  $\vec{a} = \vec{0}$  sau  $\vec{b} = \vec{0}$  implică  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

$$2. \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ și } a \neq 0, b \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$3. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$4. (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$5. \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

10) Produsul vectorial a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$

$$1) |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi, \varphi = \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \text{ și } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$3) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) \text{ constituie un triedru drept}$$

Proprietăți: 1)  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  și  $a \neq 0, b \neq 0 \Leftrightarrow a \parallel b$ .

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$3) (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$4) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$5) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

6) Fie  $\vec{a} = (a_1, b_1, c_1)$  și  $\vec{b} = (a_2, b_2, c_2)$  doi vectori dați; atunci

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right),$$

respectiv

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

11) *Dublul produs vectorial*:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

12) *Identități vectoriale*.

- 1)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ .
- 2)  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c})$
- 3)  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ .

13) *Produsul mixt a trei vectori*.  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

*Proprietăți*: 1)  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sînt trei vectori coplanari.

$$2) \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}$$

$$3) (\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d} = \vec{a} \vec{c} \vec{d} + \vec{b} \vec{c} \vec{d}$$

$$4) (\lambda \vec{a}) \vec{b} \vec{c} = \vec{a} (\lambda \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{b} (\lambda \vec{c}) = \lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c}$$

5) Fie  $\vec{a} = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $\vec{b} = (a_2, b_2, c_2)$  și  $\vec{c} = (a_3, b_3, c_3)$  trei vectori dați, atunci

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

14) *Proiecția unui vector*  $\vec{a}(a_1, b_1, c_1)$  *pe o axă*  $l$  *de versor*  $\vec{s}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ :  $\text{Pr}_l \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{s}$ .

*Proprietăți*: 1.  $\text{Pr}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_l \vec{a} + \text{Pr}_l \vec{b}$ .

$$2. \text{Pr}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{Pr}_l \vec{a}.$$

### 3.3.2. Transformări geometrice în plan

1. *Translația de vector*  $\vec{v}(a, b)$ .

*Definiție*. Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct  $P$  al acestuia, de vector de poziție  $\vec{OP}$ , punctul  $P_1$ , de vector de poziție  $\vec{OP}_1 = \vec{OP} + \vec{v}$  (figura 3.46)

*Notăție*.  $T, T_{\vec{v}}$ .

*Proprietăți*.

1. O translație este definită dacă se dau un punct  $P$  și imaginea sa  $P_1$  prin această transformare.

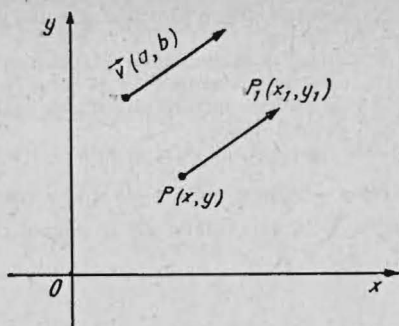


Fig. 3.46

2. Translația conservă distanțele dintre punctele planului (este o izometrie\*) și transformă o dreaptă dată în una paralelă cu aceasta, distinctă de ea sau nu.

3. Translația conservă coliniaritatea punctelor planului și unghiurile.

4. Translația transformă un poligon într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un cerc egal cu cel dat.

5. Dacă  $P_1(x_1, y_1)$  este imaginea lui  $P(x, y)$  prin translația  $T$ , atunci avem

$$x_1 = x + a, y_1 = y + b^{**}$$

Alte proprietăți. 1.  $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a} + \vec{b}}$

$$2. T_{\vec{a}} \circ T_{-\vec{a}} = T_{-\vec{a}} \circ T_{\vec{a}} = E^{***}$$

$$3. T_{\vec{0}} = E.$$

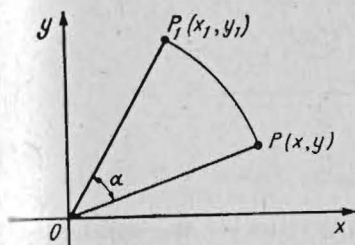


Fig. 3.47

2. Rotația față de un punct (centru)  $O$  cu unghiul  $\alpha$

Definiție: Transformarea geometrică a planului, care asociază fiecărui punct  $P$  al acestuia, punctul  $P_1$  definit de proprietățile  $\sphericalangle(OP, OP_1) = \alpha$  și  $\overline{OP_1} = \overline{OP}$  (figura 3.47)

Notăție:  $R_O^\alpha$ .

Proprietăți.

1. O rotație este definită dacă se dau: sau punctul  $O$  împreună cu un punct  $P$  și cu imaginea sa  $P_1$ ; sau două puncte (distincte)  $P$  și  $Q$  împreună cu imaginile lor  $P_1$  și  $Q_1$ .

\* În planul  $p$ , se numește izometrie o aplicație  $I: p \rightarrow p$ , care are proprietatea  $d(I(A), I(B)) = d(A, B)$ ,  $\forall A, B \in p$ .

\*\* Ecuațiile translației de vector  $\vec{v}(a, b, c)$  în spațiu sînt

$$x_1 = x + a, y_1 = y + b, z_1 = z + c.$$

\*\*\* Cu  $E$  am notat transformarea identică a planului.



2. Rotația conservă distanțele dintre punctele planului (este o izometrie) și transformă dreptele în drepte.

3) Rotația conservă coliniaritatea punctelor planului și unghiurile.

4) Rotația invariază cercurile cu centrele în punctul  $O$ .

5) Rotația transformă un poligon într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un cerc egal cu acel dat.

6) Dacă  $P_1(x_1, y_1)$  este imaginea lui  $P(x, y)$  prin rotația  $R_0^\alpha$ , atunci avem

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

7) Dacă  $\underbrace{R_0^\alpha \circ \dots \circ R_0^\alpha}_n = E$ , atunci rotația  $R_0^\alpha$  se spune că are *ordinul*  $n$ .

de  $n$  ori

*Alte proprietăți.*

1.  $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}, R_0^{\alpha+2k\pi} = R_0^\alpha.$

2.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, R_0^\alpha \circ R_0^\beta = R_0^\beta \circ R_0^\alpha = R_0^{\alpha+\beta}.$

3.  $\forall \alpha \in \mathbf{R}, R_0^\alpha \circ R_0^{-\alpha} = E.$

4.  $R_0^\pi = S_0.$ \*

3. *Simetria față de o dreaptă  $d$  a planului*

*Definiție.* Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct  $P$  al acestuia punctul  $P_1$  definit de proprietățile:  $PP_1 \perp d$  și  $\overline{PO'} = \overline{O'P_1}$  (fig. 3.48)

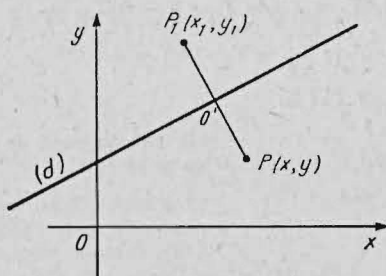


Fig. 3.48

*Notăție.*  $S_d$ .

*Proprietăți.* 1) Simetria conservă distanțele dintre punctele planului (este o izometrie) și transformă dreptele în drepte.

2. Simetria invariază dreptele perpendiculare pe dreapta  $d$  și cercurile cu centrele pe axa de simetrie  $d$ .

3. Simetria păstrează coliniaritatea punctelor din plan și unghiurile, dar orientarea figurilor o inversează.

4. Simetria transformă un poligon dat într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un alt cerc egal cu cel dat.

5. Dacă  $P_1(x_1, y_1)$  este imaginea lui  $P(x, y)$  prin simetria  $S_d$ , unde  $d$  este prima bisectoare, atunci avem

$$x_1 = y, \quad y_1 = x.$$

\* A se vedea „simetria față de un punct  $O$  din spațiu“, pag. 191.

6. Asemănător, dacă  $d$  este axa  $Ox$ , atunci avem

$$x_1 = x, \quad y_1 = -y.$$

7. Asemănător, dacă  $d$  este axa  $Oy$ , atunci avem

$$x_1 = -x, \quad y_1 = y.$$

*Alte proprietăți.*

1. Dacă  $d \perp d'$  și  $O = d \cap d'$ , atunci.

$$S_d \circ S_{d'} = S_{d'} \circ S_d = S_O.$$

2. Dacă  $d \parallel d'$ , atunci

$$S_d \circ S_{d'} = T \text{ (translație).}$$

4. Omotetia de centru sau pol  $O$  și raport  $k \in \mathbf{R}$ .

*Definiție:* Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct  $P$  al acestuia punctul  $P_1$  definit de proprietatea  $\overline{OP_1} = k\overline{OP}$  (figura 3.49).

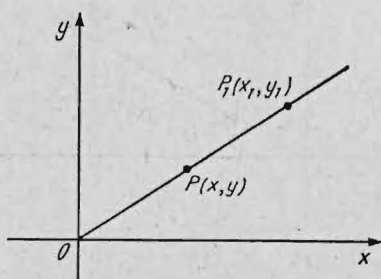


Fig. 3.49

*Notafie:*  $H_k^O$ .

*Proprietăți.* 1. O omotetie este definită dacă se dau punctul  $O$  împreună cu un punct  $P$  și cu imaginea sa  $P_1$ .

2. Omotetia nu păstrează distanțele dintre puncte. Ea le amplifică cu raportul omotetiei în modul,  $|k|$ .

3. Omotetia invariază dreptele ce trec prin pol.

4. Omotetia păstrează unghiul dreptelor.

5. Omotetia transformă o dreaptă dată într-o dreaptă paralelă cu cea dată, un poligon dat într-un poligon asemenea cu cel dat și cercurile în cercuri.

6. Dacă  $P_1(x_1, y_1)$  este imaginea lui  $P(x, y)$  prin omotetia  $H_k^O$ , atunci avem

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky^*.$$

\* Ecuațiile omotetiei în spațiu sînt

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky, \quad z_1 = kz.$$

*Alte proprietăți.*

1.  $H_0^1 = E$
2.  $H_0^{-1} = S_0$
3.  $H_{0_1}^k \circ H_{0_1}^1 = T$ , dacă  $lk = 1$
4.  $H_{0_1}^k \circ H_{0_1}^1 = H_{0_1}^{k^2}$ , dacă  $lk \neq 1$
5.  $H_{0_1}^{\frac{1}{k}}(P_1) = P$ .

5. Inversiunea de pol  $O$  și putere  $k \in \mathbb{R}$

*Definiție:* Transformarea geometrică a planului care asociază fiecărui punct  $P$  al acestuia punctul  $P_1$ , coliniar cu  $O$  și  $P$ , definit de proprietatea (fig. 3.50)

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP_1} = k^2.$$

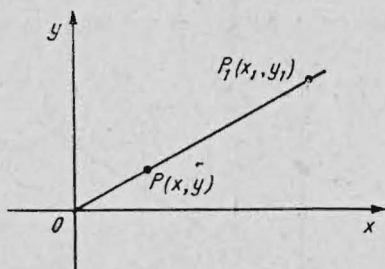


Fig. 50

*Notafie:*  $I_0^k$ .

*Proprietăți.*

1. Inversiunea nu păstrează distanțele dintre puncte.
2. Inversiunea invariază dreptele ce trec prin pol.
3. Inversiunea păstrează unghiul liniilor, dar nu și orientarea figurilor.
4. Inversiunea transformă o dreaptă ce nu trece prin pol într-un cerc ce trece prin pol și cercurile ce nu trec prin pol în cercuri ce nu trec nici ele prin pol.

5. Dacă  $P_1(x_1, y_1)$  este imaginea lui  $P(x, y)$  prin inversiunea  $I_0^k$ , atunci avem

$$x_1 = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \quad *$$

\* Ecuatiile inversiunii în spațiu sînt:

$$x_1 = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z_1 = \frac{k^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

### 3.3.3. Transformări geometrice în spațiu

#### 6. Simetria față de un punct $O$ din spațiu

**Definiție:** Transformarea geometrică a spațiului care asociază fiecărui punct  $P$  al acestuia punctul  $P_1$  definit de proprietățile:  $P_1$  se găsește pe dreapta  $OP$  și  $\overrightarrow{OP_1} = -\overrightarrow{OP}$ .

**Notăție:**  $S_O$ .

**Proprietăți:** 1. Simetria conservă distanțele dintre puncte (este o izometrie), transformă o dreaptă dată într-o dreaptă paralelă cu cea dată distinctă sau nu de aceasta, un plan într-un plan paralel cu cel dat distinct sau nu de acesta și un unghi într-un unghi egal cu cel dat.

2. Simetria păstrează coliniaritatea punctelor.

3. Simetria transformă un poligon dat într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un alt cerc egal cu cel dat.

4. Simetria invariază dreptele și planele ce trec prin  $O$ .

5. Dacă  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  este imaginea lui  $P(x, y, z)$  prin simetria  $S_O$ , atunci avem

$$x_1 = -x, y_1 = -y, z_1 = -z^*)$$

**Alte proprietăți:** 1.  $S_{O_1} \circ S_{O_2} = \overrightarrow{2O_2O_1}$  (translație)

$$2. S_O \circ S_O = E.$$

#### 7. Simetria față de un plan $p$ în spațiu

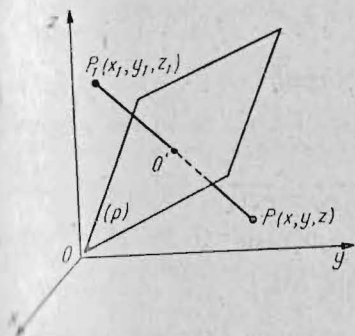


Fig. 3.51

**Definiție:** Transformarea geometrică a spațiului care asociază oricărui punct  $P$  al acestuia un punct  $P_1$  definit de proprietățile:  $PP_1 \perp p$  și  $\overline{OP_1} = \overline{OP}$  (fig. 3.51).

**Notăție:**  $S_p$

**Proprietăți:**

1. Simetria conservă distanțele dintre punctele spațiului (este o izometrie) și unghiul dreptelor, al planelor și al dreptelor cu planele.

2. Simetria invariază punctele planului  $p$ , dreptele conținute în  $p$  și planele perpendiculare pe  $p$ .

3. Simetria transformă o dreaptă într-o altă dreaptă și un plan într-un alt plan.

4. Simetria transformă o dreaptă paralelă cu  $p$  și un plan paralel cu  $p$  într-o dreaptă de asemenea paralelă cu  $p$  și într-un plan de asemenea paralel cu  $p$ .

5. Simetria păstrează coliniaritatea punctelor.

\*) Ecuațiile simetriei în spațiu sînt:

$$x_1 = -x, y_1 = -y.$$

6. Simetria transformă un poligon dat într-un alt poligon egal cu primul și un cerc dat într-un alt cerc egal cu cel dat.

Alte proprietăți: Dacă  $p_1 \parallel p_2$ , atunci  $S_{p_1} \circ S_{p_2} = T$  (translație)

8. Rotația față de o axă  $z'z$  cu unghiul  $\alpha$

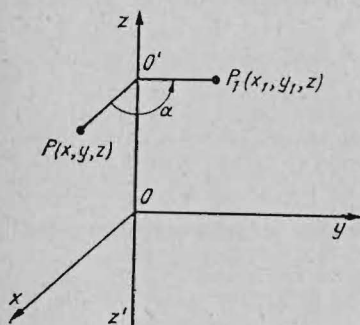


Fig. 3.52

**Definiție:** Transformarea geometrică a spațiului, care asociază fiecărui punct  $P$  al acestuia punctul  $P_1$  definit de proprietățile:  $\sphericalangle(O'P, O'P_1) = \alpha$ ,  $O'P = O'P_1$  și punctele  $O', P, P_1$  se găsesc într-un același plan perpendicular pe axa  $z'z$  în  $O'$  (figura 3.52).

**Notăție:**  $R_{z'z}^\alpha$ .

**Proprietăți.** 1. O rotație este definită dacă se dau două perechi de puncte corespondente: punctele  $P$  și  $Q$  și imaginile lor  $P_1$  și  $Q_1$ .

2. Rotația conservă distanțele dintre punctele spațiului (este o izometrie) și transformă dreptele în drepte.

3. Rotația conservă coplanaritatea punctelor din spațiu și unghiurile.

4. Rotația transformă un poligon într-un poligon egal și un cerc într-un cerc egal cu cel dat.

5. Dacă  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  este imaginea lui  $P(x, y, z)$  prin rotația  $R_{z'z}$ , atunci avem

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z_1 = z.$$

### 3.3.4. Punctul și dreapta. Planul

1° **Teorema lui Michel Charles:** Dacă  $P_i(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sînt  $n$  puncte pe o dreaptă, atunci

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \vec{0}$$

2° Distanța  $d$  dintre două puncte  $P_1(x_1)$  și  $P_2(x_2)$  este

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

3° Abscisa  $x$  a punctului  $P$  care împarte segmentul  $\overline{P_1P_2}$  în raportul  $k$ ,

$$\overrightarrow{P_1P} = k \overrightarrow{PP_2},$$

este

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}.$$

Pentru  $k = 1$ , găsim abscisa mijlocului  $P(x)$  al segmentului  $\overline{P_1P_2}$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

4° O condiție necesară și suficientă ca punctul  $P'(x')$  să fie conjugat armonic cu  $P''(x'')$  față de  $P_1(x_1)$  și  $P_2(x_2)$ , toate punctele fiind situate pe o aceeași dreaptă, este

$$2(x_1x_2 + x'x'') = (x_1 + x_2)(x' + x'')$$

5° Distanța  $d$  dintre două puncte  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  din plan este

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Dacă  $P_1 = O$  și  $P_2 = P(x, y)$ , atunci  $d = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

6° Cordonatele punctului  $P(x, y)$  care imparte segmentul  $\overline{P_1P_2}$  în raportul  $k$ ,

$$\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{PP_2}$$

sînt

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Dacă  $P$  e mijlocul lui  $P_1P_2$ , atunci  $P$  are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

7° Coordonatele centrului de greutate  $G$  al triunghiului format de punctele  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sînt

$$G: x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

8° O condiție necesară și suficientă ca punctele  $P_3(x_3, y_3)$  și  $P_4(x_4, y_4)$  să fie conjugate armonic cu  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  este exprimată de egalitățile:

$$\begin{cases} 2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ 2(y_1y_2 + y_3y_4) = (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) \end{cases}$$

9° Ecuațiile unor drepte particulare din plan:

$$x = 0 \text{ (axa } y'Oy):$$

$$y = x \text{ (prima bisectoare);}$$

$$y = 0 \text{ (axa } x'Ox):$$

$$y = -x \text{ (a doua bisectoare);}$$

$$x = a \text{ (dreaptă paralelă la } y'Oy); \quad y = mx \text{ (dreaptă ce trece prin } O).$$

$$y = b \text{ (dreaptă paralelă la } x'Ox):$$

10° Ecuația generală a dreptei este  $Ax + By + C = 0$ ; ecuația redusă a dreptei este  $y = mx + n$ .

11° Ecuația dreptei care taie axele de coordonate în  $A(a, 0)$  și  $B(0, b)$  sau ecuația dreptei prin tăieturi este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0:$$

12° Ecuația normală a dreptei (forma lui L. O. Hesse) este

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

13° Ecuatia dreptei care trece prin  $P_0(x_0, y_0)$  și are coeficientul unghiular  $m$ , dat, este

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

14° Ecuatia dreptei care trece prin două puncte  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

sau, sub formă de determinant,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și dreapta are coeficientul unghiular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

15° Ecuatia dreptei care trece prin  $O$  și prin  $P_1(x_1, y_1)$  este  $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$ .

16° O condiție necesară și suficientă ca dreptele

$$D_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (1)$$

$$D_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

să se intersecteze la distanță finită este

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

17° O condiție necesară ca dreptele  $D_1$  și  $D_2$  să fie paralele este  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ .

18° O condiție necesară și suficientă ca dreptele  $D_1$  și  $D_2$  să fie paralele este ca sistemul (1) să nu aibă soluții.

19° Condiția necesară și suficientă ca dreptele  $D_1$  și  $D_2$  să coincidă este

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

20° Unghiul  $\alpha$  al dreptelor  $D_1$  și  $D_2$  care au coeficienții unghiulari  $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ ,  $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ , este dat de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

21° O condiție necesară și suficientă ca dreptele  $D_1$  și  $D_2$  să fie perpendiculare este

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \text{ sau } 1 + m_1 m_2 = 0.$$

22° Ecuația unei normale oarecare la dreapta de ecuație  $Ax + By + C = 0$  este

$$Bx - Ay + C' = 0, \text{ cu } C' \text{ arbitrar.}$$

23° Ecuațiile parametrice ale dreptei care trece prin  $P_1(x_1, y_1)$  și  $P_2(x_2, y_2)$  sînt

$$x = \frac{x_1 + ky_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \quad k = \text{parametru real.}$$

24° Ecuațiile parametrice ale dreptei definite printr-un punct  $P_0(x_0, y_0)$  și o direcție  $\alpha$  sînt

$$x = x_0 + \rho \cos \alpha, \quad y = y_0 + \rho \sin \alpha, \quad \rho = \text{parametru real.}$$

25° Ecuația fascicului de drepte paralele (de pantă dată  $m$ ) este

$$y = mx + \lambda, \quad \lambda = \text{parametru real.}$$

26° Ecuația fascicului de drepte care trec prin intersecția dreptelor  $D_1$  și  $D_2$  este

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

$$\lambda = \text{parametru real}$$

sau, dacă  $P_0(x_0, y_0)$  este vîrfurile fascicului,

$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad m = \text{parametru real.}$$

27° Condiția necesară și suficientă ca trei drepte

$$D_i: A_ix + B_iy + C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

să fie concurente (la distanță finită, la infinit sau într-un punct nedeterminat) este

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

28° Distanța  $d$  de la punctul  $P_0(x_0, y_0)$  la dreapta  $D: Ax + By + C = 0$  este

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

29° Ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele  $D_1$  și  $D_2$  sînt

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

30° Aria triunghiului determinat de  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , este,

$$S = \frac{|D|}{2}, \quad \text{unde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



31° Condiția necesară și suficientă ca 3 puncte  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , să fie în linie dreaptă este

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

32° Transformarea coordonatelor carteziene rectangulare într-o translație de la sistemul  $xOy$  la sistemul  $XO'Y$ , cu  $O'(a, b)$ , este dată de formulele (fig. 3.53)

$$\begin{cases} x = a + X, \\ y = b + Y, \end{cases}$$

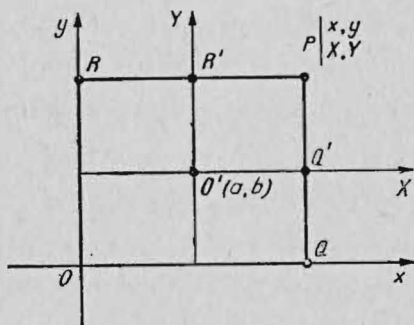


Fig. 3.53

unde  $x, y$  sînt coordonatele unui punct  $P$  față de reperul  $xOy$ ;  $a, b$  coordonatele noii origini  $O'$  față de reperul  $xOy$ , iar  $X, Y$  coordonatele lui  $P$  față de noul reper  $XO'Y$ .

33° Transformarea coordonatelor carteziene ortogonale într-o rotație de unghi  $\alpha = \sphericalangle(Oy, OX)$  și centru  $O$  a axelor de coordonate este dată de formulele (fig. 3.54)

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{cases}$$

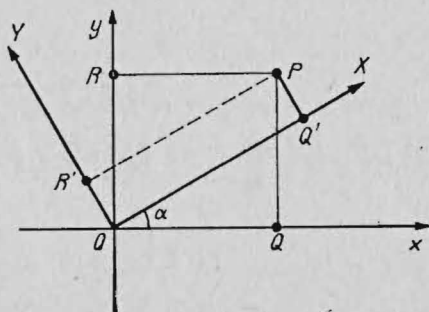


Fig. 3.54

### 3.3.5. Cercul

1° Ecuația cercului  $C$  cu centrul în origine și raza  $r$  este

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (1)$$

2° Ecuațiile lui parametrice sînt  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

3° Ecuația cu pătratele strinse este

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, \quad (2)$$

unde  $a$  și  $b$  sînt coordonatele centrului său  $\omega$ , iar  $r$  raza cercului.

4° Ecuația normală a cercului este

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \quad (3)$$

unde  $a = -\frac{m}{2}$ ,  $b = -\frac{n}{2}$  și  $r^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p$ .

5° Ecuația generală a cercului este  $A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$ ,  $A \neq 0$ .

6° Ecuația pătratică a tangentelor la cercul (1), duse din punctul exterior  $P_0(x_0, y_0)$ , este

$$(r^2 - y_0^2)(x - x_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) + (r^2 - x_0^2)(y - y_0)^2 = 0.$$

7° Puterea  $\varphi$  a punctului  $P_0(x_0, y_0)$  față de cercul (2) este

$$\varphi = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

8° Cercurile  $C_1$  și  $C_2$  de ecuații  $x^2 + y^2 + m_i x + n_i y + p_i = 0$ ,  $i = 1, 2$  sînt ortogonale dacă și numai dacă  $m_1 m_2 + n_1 n_2 - 2(p_1 + p_2) = 0$ .

9° Ecuația axei radicale a aceluiași cercuri  $C_1$  și  $C_2$  este

$$(m_1 - m_2)x + (n_1 - n_2)y + p_1 - p_2 = 0.$$

10° Ecuațiile parametrice ale cercului (2) sînt

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

11° Ecuația cercului care trece prin trei puncte necoliniare date  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , este

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12° Ecuația tangentei la cercurile (1) și (3) în punctul lor  $P_0(x_0, y_0)$  sînt

$$xx_0 + yy_0 - r^2 = 0.$$

$$xx_0 + yy_0 + \frac{m}{2}(x + x_0) + \frac{n}{2}(y + y_0) + p = 0.$$

13° Ecuațiile (magice ale) tangentelor la cerc paralele cu o direcție dată  $m$  sînt

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

cînd centrul cercului se află în originea reperului respectiv,  $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$ , cînd centrul este în  $\omega(a, b)$ .

14° Ecuația polarei punctului  $P_0(x_0, y_0)$  care nu aparține cercului (3) este

$$xx_0 + yy_0 + \frac{m}{2}(x + x_0) + \frac{n}{2}(y + y_0) + p = 0.$$

### 3.3.6. Elipsa

1° Elipsa  $E$  raportată la axe are ecuația canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde  $a, b$  sînt lungimile semiaxelor, iar  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  distanța de la centru la fiecare focar  $F$  și  $F'$  (fig. 3.55).

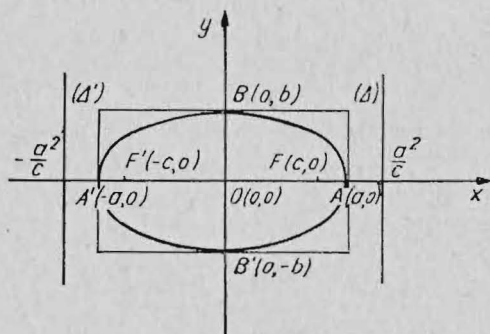


Fig. 3.55

2° Elipsa cu centrul în  $O'(p, q)$ , raportată la reperul  $xOy$ , și avînd axele paralele cu axele sistemului de coordonate, are ecuația

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

3° Elipsa este proiecția ortogonală a cercului său principal (cercul de centru  $O$  și raza  $a$ ), așezat într-un plan ce face cu planul elipsei unghiul  $\alpha$  dat de relația  $\cos \alpha = \frac{b}{a}$ .

4° Ecuațiile parametrice ale elipsei sînt  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

5° Ecuația (canonică a) tangentei la elipsa  $E$  în  $P_0(x_0, y_0) \in E$  este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

6° Ecuațiile (magice ale) tangentelor la elipsă paralele cu o direcție dată  $m$  sînt

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

7° Ecuația pătratică a tangentelor la elipsă care se pot duce din punctul  $P_0(x_0, y_0)$  exterior elipsei este

$$(a^2 - x_0^2)(y - y_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) + (b^2 - y_0^2)(x - x_0)^2 = 0.$$

8° Locul punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la elipsă este cercul lui Monge

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

9° Tangenta la elipsă într-un punct  $P \in E$  este bisectoarea exterioară a unghiului format de razele vectoare ale lui  $P$ .

10° Locul proiecțiilor unui focar al elipsei pe tangentele elipsei este cercul principal al elipsei  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ .

11° Ecuația polarei unui punct  $P_0(x_0, y_0) \notin E$  față de elipsă este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

12° Ea coincide cu ecuația tangentei cînd  $P_0 \in E$ .

13° Ecuația normalei la elipsă în  $P_0(x_0, y_0) \in E$  este

$$y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

14° La elipsă se pot duce două normale paralele cu o direcție dată  $m$ .

15° Dintr-un punct dat se pot duce la elipsă două normale sau patru normale.

16° Ecuațiile directoarelor la elipsă sînt  $x = \frac{a^2}{c}$  și  $x = -\frac{a^2}{c}$ .

17° Raportul distanțelor de la un punct al elipsei la focar și la directoarea corespunzătoare este constant și egal cu  $\frac{c}{a}$ .

18° Excentricitatea elipsei este  $e = \frac{c}{a} < 1$ .

19° Aria elipsei este  $S = \pi ab$ .

### 3.3.7. Hiperbola

1° Hiperbola  $H$  raportată la axe are ecuația canonică

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (1)$$

unde  $a$ ,  $b$  sînt lungimile semiaxelor, iar  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  este distanța de la centrul său  $O$  la focarele  $F$  și  $F'$  (fig. 3.56).

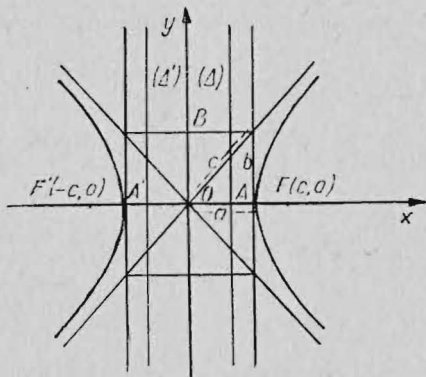


Fig. 3.56

2° Asimptotele hiperbolei sînt

$$y = \frac{bx}{a} \quad \text{și} \quad y = -\frac{bx}{a}.$$

3° Hiperbola cu centrul în  $O'(p, q)$ , raportată la reperul  $xOy$  și avînd axele sale paralele cu axele reperului, are ecuația

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} - \frac{(y - q)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

4° Ecuațiile parametrice ale hiperbolei sînt

$$x = \frac{a}{2} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$y = \frac{b}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$\lambda =$  parametru real.

5° Ecuația hiperbolei conjugate cu (1) este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

6° Ecuația hiperbolei echilateră este

$$x^2 - y^2 = a^2$$

sau, cind este raportată la asimptote drept axe de coordonate,

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

7° Ecuația (canonică a) tangentei la hiperbolă  $H$  în  $F_0(x_0, y_0) \in H$  este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

8° Ecuațiile (magice ale) tangențelor la hiperbolă, paralele cu o direcție dată  $m$ , sînt

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

9° Ecuația pătratică a tangențelor la hiperbolă care se pot duce din  $F_0(x_0, y_0)$ , exterior hiperbolei, este

$$(a^2 - x_0^2)(y - y_0)^2 + 2x_0y_0(x - x_0)(y - y_0) - (b^2 + y_0^2)(x - x_0)^2 = 0.$$

10° Locul punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la hiperbolă este cercul lui Monge

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2, \text{ cind } a > b.$$

11° Orice paralelă la una din asimptotele hiperbolei taie curba într-un singur punct la distanță finită.

12° Tangenta (geometrică) la hiperbolă într-un punct  $P \in H$  este bisectoarea inferioară a unghiului format de razele vectoriale ale lui  $P$ .

13° Locul proiecțiilor unui focar al hiperbolei pe tangentele curbei este cercul cu diametrul egal cu axa transversă a hiperbolei (cercul principal al hiperbolei  $x^2 + y^2 = a^2$ ).

14° Ecuația polarei unui punct  $P_0(x_0, y_0) \notin H$  față de hiperbolă este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

Ea coincide cu ecuația tangentei cind  $P_0 \in H$ .

15° Ecuația normalei la hiperbolă în  $P_0(x_0, y_0) \in H$  este

$$y - y_0 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

16° La hiperbolă se pot duce două normale paralele cu o direcție dată  $m$ , cind  $a^2 - b^2m^2 > 0$ .

17° Dintr-un punct dat se pot duce la hiperbolă două normale, patru sau trei, din care una poate fi considerată ca dublă.

18° Ecuațiile directoare la hiperbolă sînt  $x = \frac{a^2}{c}$  și  $x = -\frac{a^2}{c}$ .

1° Raportul distanțelor de la un punct al hiperbolei la focar și la directoarea corespunzătoare este constant și egal cu  $\frac{c}{a}$ .

2° Excentricitatea hiperbolei este  $e = \frac{c}{a} > 1$ .

### 3.3.8. Parabola

1° Ecuația (canonică a) parabolei  $P$  raportată la axa ei de simetrie  $Ox$  și la tangenta  $Oy$  în virful său  $O$  este

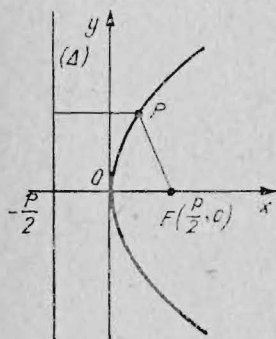


Fig. 3.57

$$y^2 - 2px = 0,$$

unde  $p$  e parametrul parabolei, iar  $\frac{p}{2} = OF$  este abscisa focarului  $F$  de pe axa  $Ox$  (fig. 3.57).

2° Parabola cu virful în  $O'(\alpha, \beta)$ , raportată la reperul  $xOy$  și avind axa și tangenta la virf paralele cu axele reperului, este

$$(y - \beta)^2 - 2p(x - \alpha) = 0$$

sau

$$x = \frac{1}{2p} y^2 - \frac{\beta}{p} y + \frac{\beta^2}{2p} + \alpha.$$

3° Ecuația

$$x = ay^2 + by + c$$

reprezintă o parabolă cu

$$p = \frac{1}{2a}, \quad \alpha = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad \beta = -\frac{b}{2a}.$$

4° Ecuația

$$y = ax^2 + bx + c$$

reprezintă o parabolă cu

$$p = \frac{1}{2a}; \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

5° Ecuațiile parametrice ale parabolei sînt

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda^2}{2p} \\ y = \lambda, \end{cases} \quad \lambda = \text{parametru real.}$$

6° Ecuația (canonică a) tangentei la parabola  $P$  în  $P_0(x_0, y_0) \in P$  este

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

7° Ecuația (magică a) tangentei la parabolă, paralelă cu o direcție dată  $m$ , este

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

8° Ecuația pătratică a tangentelor la parabolă, care se pot duce dintr-un punct  $P_0(x_0, y_0)$  exterior parabolei este

$$2x_0(y - y_0)^2 - 2y_0(x - x_0)(y - y_0) + p(x - x_0)^2 = 0$$

9° Locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la parabolă este directoarea parabolei  $x = -p/2$ .

10° Tangenta la parabolă într-un punct al ei este bisectoarea unghiului format de raza vectoare și paralela la axa  $Ox$  dusă prin acel punct.

11° Locul geometric al proiecției focarului pe tangentele la parabolă este tangenta la vîrf.

12° Locul geometric al simetricului focarului față de tangentele la parabolă este directoarea parabolei.

13° Ecuația polarei unui punct  $P_0(x_0, y_0) \notin P$  față de parabolă este

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

14° Ea coincide cu ecuația tangentei cînd  $P_0(x_0, y_0) \in P$ .

15° Ecuația normalei la parabolă în  $P_0(x_0, y_0) \in P$  este

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$$

16° La o parabolă se poate duce o singură normală paralelă cu o direcție dată  $m$ .

17° Dintr-un punct dat se pot duce la o parabolă cel mult trei normale și cel puțin una.

18° Ecuația directoarei la parabolă este  $x = -\frac{p}{2}$

19° Raportul distanțelor de la un punct al parabolei la focar și la directoare este constant și egal cu unitatea.

20° Excentricitatea parabolei este  $e = 1$

### 3.3.9. Curbele reprezentate de ecuația

$$y^2 = 2px + qx^2$$

$$1) p \neq 0 \begin{cases} q = -1 \text{ cerc} \\ q = 0 \text{ parabolă} \\ q \neq \begin{cases} < -1 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} q < 0 \text{ elipsă cu semiaxele } a \text{ și } a\sqrt{-q} \\ q > 0 \text{ hiperbolă cu semiaxele } a \text{ și } a\sqrt{q} \end{cases} \end{cases}$$

$$2) p = 0 \begin{cases} q > 0 & \text{două drepte care trec prin origine} \\ q < 0 & \text{două drepte imaginare} \\ q = 0 & \text{două drepte confundate cu axa } x'Ox. \end{cases}$$



### 3.3.10. Secțiuni conice

Într-un con de rotație, secțiunea dreaptă este un cerc; dacă planul de secțiune nu este perpendicular pe axă, atunci secțiunea este elipsă, hiperbolă sau parabolă, după cum

1) planul secant întâlnește numai o pinză a conului și taie toate generatoarele (fig. 3.58, a);

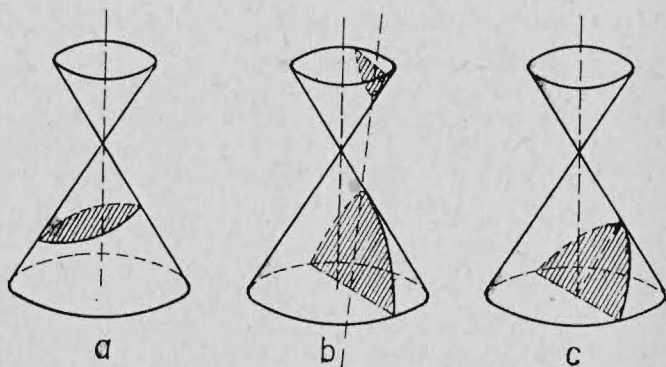


Fig. 3.58

2) planul secant întâlnește ambele pinze ale conului (fig. 3.58, b);

3) planul secant este paralel cu un plan tangent la con (planul secant nu mai taie toate generatoarele, una fiind paralelă cu el, fig. 3.58, c).

## 4. TRIGONOMETRIE

### 4.1. Unități de măsură pentru unghiuri. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani

Unitățile de măsură pentru unghiuri și arce sînt: gradul *sexagesimal* ( $^{\circ}$ ), cu submultiplii săi minutul sexagesimal ( $'$ ) și secunda sexagesimală ( $''$ ), *rationalul*, unghiul drept (dr) și gradul centesimal ( $^{\circ}$ ), cu submultiplii săi minutul centesimal ( $^{\circ}$ ) și secunda centesimală ( $^{\circ}$ ):

$$1^{\circ} = 60' = 3600''; \quad 1' = 60'';$$

$$1^{\circ} = 100^{\circ} = 10\,000^{\circ}; \quad 1^{\circ} = 100^{\circ};$$

$$90^{\circ} = \frac{\pi}{2} \text{ radiani} = 100^{\circ} = 1 \text{ dr.}$$

Unghiurile se notează cu diferite litere mici ale alfabetului latin  $u, v, w, x, y$ , ale alfabetului grecesc  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$  sau cu litere mari ale alfabetului latin, de pildă  $A, B, C, D$ .

Ca orice mărime fizică, un unghi este egal cu măsura sa înmulțită cu unitatea de măsură aleasă.

Intrucît în practică se întîlnesc unghiuri și arce măsurate cu diferite unități de măsură, este necesar să știm a trece de la unele unități de măsură la altele. Astfel cu ajutorul Tabelei 4.1 putem transforma gradele sexagesimale în radiani și reciproc.

Modul de folosire al tabelii se deduce imediat.

*Exemplul 1.* Să se afle cîți radiani are unghiul de  $49^{\circ}20'8''$ . Avem  $49^{\circ} = 40^{\circ} + 9^{\circ}$ .

Căutînd pe  $40^{\circ}$ , respectiv  $9^{\circ}$ , în coloana gradelor, găsim valorile 0,698132 respectiv 0,157080 în coloana radianilor. Căutînd și  $20'$ , respectiv  $8''$  în coloana minutelor și secundelor, citim radianii în coloana alăturată, adică 0,005818, respectiv 0,000039. Adăugînd găsim rezultatul căutat:

$$49^{\circ}20'8'' = 0,698132 + 0,157080 + 0,005818 + 0,000039 = 0,851069 \text{ radiani.}$$

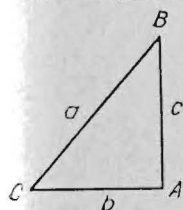
*Exemplul 2.* Să se afle cîte grade are unghiul de 4,546 radiani. Se caută în tabelă valoarea imediat mai mică (4,363323) și se citește numărul de grade corespunzătoare, adică  $250^{\circ}$ . Se face diferența  $4,576 - 4,363323 = 0,212677$  și se caută numărul de grade corespunzător acestei diferențe, întocmai ca mai înainte. Rezultă  $12^{\circ}$  și diferența  $0,212677 - 0,209440 = 0,003237$ . Procedîndu-se ca mai sus rezultă  $10'$  și diferența  $0,003237 - 0,002900 = 0,000337$ , apoi  $1''$  și diferența  $0,000337$ , careia îi corespund aproximativ  $30''$ . Deci rezultatul este  $4,546 \text{ radiani} = 250^{\circ} + 12^{\circ} + 10' + 1'' + 30'' = 262^{\circ}11'30''$ .

Tabela 4.1. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani

Secunde și minute	Radiani	Grade	Radiani	Grade	Radiani
1"	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,553505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575995
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1'	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000873	18	0,314159	80	1,396263
		19	0,331613	85	1,483530
4	0,001164	20	0,349066	90	1,570796
5	0,001454	21	0,366519	100	1,745329
6	0,001745	22	0,383972	120	2,094395
7	0,002036	23	0,401426	150	2,617994
8	0,002327	24	0,418879	180	3,141593
9	0,002618	25	0,436332	200	3,490659
10	0,002909	26	0,453786	250	4,363323
20	0,005818	27	0,471239	270	4,712389
30	0,008727	28	0,488692	300	5,235988
40	0,011636	29	0,506145	360	6,283185
50	0,014544	30	0,523599	400	6,981317

## 4.2. Definiția funcțiilor trigonometrice ale unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic

Dacă  $ABC$  este un triunghi dreptunghic în  $A$ ,  $b$ ,  $c$  și  $a$  sunt lungimile catetelor și  $a$  lungimea ipotenuzei, atunci (fig. 4.1)



$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}$$

$$\sin C = \frac{c}{a}, \quad \cos C = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$$

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\sec C = \frac{1}{\cos C} = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{cosec} C = \frac{1}{\sin C} = \frac{a}{c}$$

Fig. 4.1

## 4.3. Definiția funcțiilor trigonometrice pentru unghiuri oarecare și argumente numerice

În planul  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  raportat la un reper ortonormat  $(Ox, Oy)$  considerăm cercul trigonometric (de rază 1) de centru  $O$ , un punct  $M$  pe cerc,  $M'$  proiecția ortogonală a lui  $M$  pe raza  $OA$  (fig. 4.2, a), tangentele la cerc în  $A$

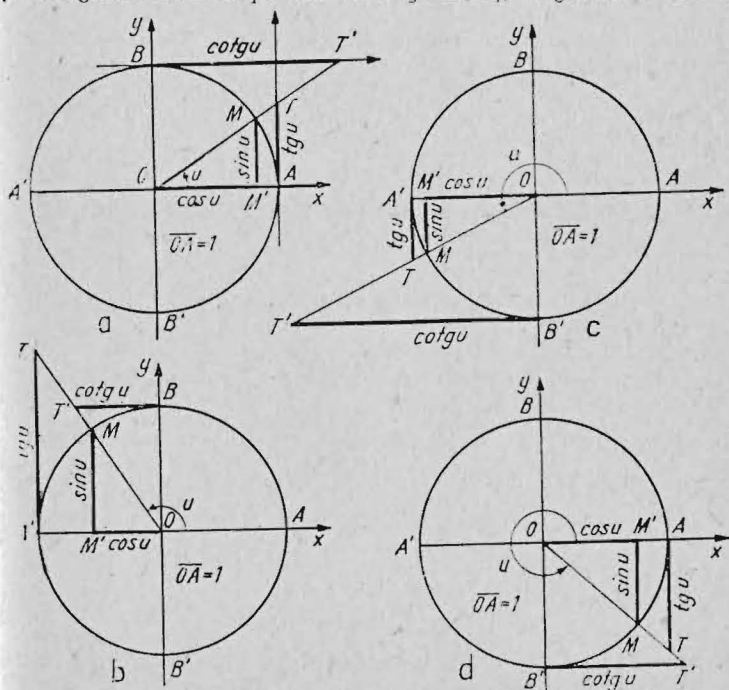


Fig. 4.2

și  $B$ , orientate la fel cu axele de coordonate  $Ox$  și  $Oy$  și punctele  $T$  și  $T'$  rezultate din intersecția razei vectoriale  $OM$  cu aceste tangente.

Dacă  $u = \sphericalangle(\vec{OA}, \vec{OM}) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  atunci avem prin definiție

$$\cos u = \frac{\overline{OM'}}{OM}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u} \qquad \operatorname{tg} u = \frac{\overline{AT}}{OM'}; \quad \sec u = \frac{1}{\cos u}$$

sau

$$\sin u = \frac{\overline{M'M}}{OM}, \quad \operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\sin u} \qquad \operatorname{cotg} u = \frac{\overline{BT'}}{M'M}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}$$

Pentru  $u = 0$  și  $u = \frac{\pi}{2}$ , avem  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\operatorname{tg} 0 = 0$ ,  $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sec 0 = 1$ ,  $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 1$ , tangenta și secanta nefiind definite în  $u = \frac{\pi}{2}$ , iar cotangenta și cosecanta nefiind definite în  $u = 0$ . Pentru unghiuri  $u \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$  avem definiții analoge (fig. 4.2, b, c, d).

Aceste definiții se extind, definiind  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$ ,  $\sec$ ,  $\operatorname{cosec}$  atât pe mulțimea unghiurilor măsurate în radiani în valoare absolută mai mare decât  $2\pi$ , respectiv pe mulțimea numerelor reale prin proprietatea

„ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists u \in [0, 2\pi)$  și  $\exists k \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $x = u + 2 \cdot k\pi$ ” și prin periodicizarea funcțiilor trigonometrice.

#### 4.4. Periodicitatea funcțiilor trigonometrice fundamentale

Funcțiile  $\sin$  și  $\cos$  sînt periodice cu perioada  $T = 2\pi$ , iar funcțiile  $\operatorname{tg}$  și  $\operatorname{cotg}$  sînt periodice cu perioada  $T = \pi$  și avem

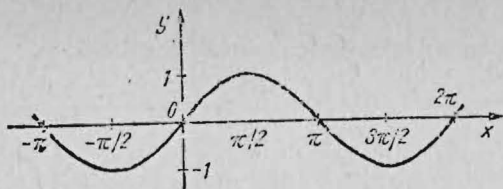
$$1. \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

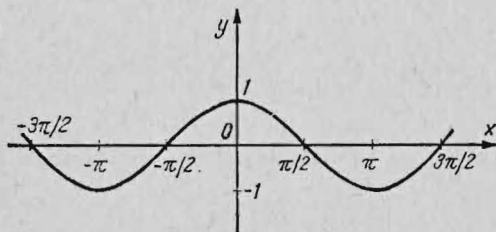
$$3. \operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi, k \in \mathbb{Z}$$

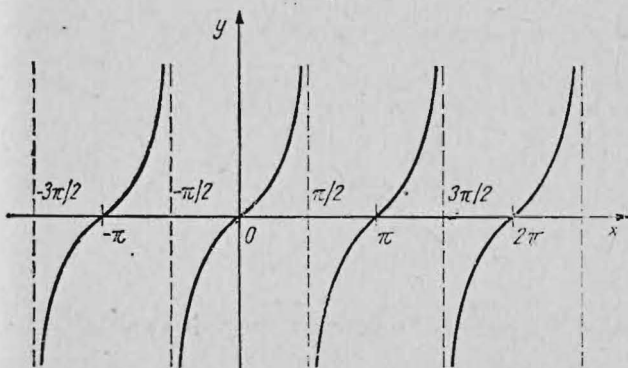
#### 4.5. Graficele funcțiilor trigonometrice fundamentale (fig. 4.3, a, b, c, d).



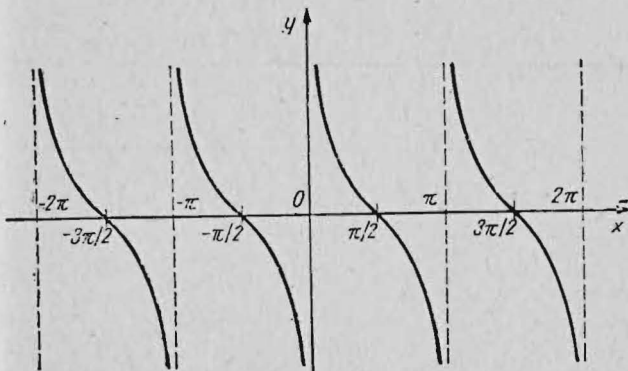
a  $y = \sin x$



b  $y = \cos x$



c  $y = \text{tg} x$



d  $y = \text{cot} g x$

Fig. 4.3

#### 4.6. Identități trigonometrice fundamentale:

$$\forall u \in \mathbf{R}, \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$\forall u \in \mathbf{R} \setminus \frac{\mathbf{Z}\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{cotg} u = 1$$

$$\forall u \in \mathbf{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi \right), \quad 1 + \operatorname{tg}^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$$

$$\forall u \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u.$$

#### 4.7. Continuitatea și derivabilitatea funcțiilor trigonometrice

*Teoremă:* Funcțiile trigonometrice sînt continue pe domeniile lor de definiție.

*Teoremă:* Funcțiile trigonometrice sînt indefinit derivabile pe domeniile lor de definiție.

*Teoremă.* Primitivele celor 6 funcții trigonometrice se exprimă cu ajutorul funcțiilor trigonometrice înseși și al logaritmului acestor funcții.

*Teoremă.* Funcțiile  $\sin, \cos: \mathbf{R} \rightarrow [-1; 1]$  sînt soluțiile următoarelor probleme Cauchy:

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

și

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

#### 4.8. Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice fundamentale

Cadrantul	Funcția	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cotg} u$
I	$\left( 0 < u < \frac{\pi}{2} \right)$	+	+	+	+
II	$\left( \frac{\pi}{2} < u < \pi \right)$	+	-	-	-
III	$\left( \pi < u < \frac{3\pi}{2} \right)$	-	-	+	+
IV	$\left( \frac{3\pi}{2} < u < 2\pi \right)$	-	+	-	-

#### 4.9. Formule de reducere la un unghi ascuțit

Argumentul \ Funcția	$v = \frac{\pi}{2} \pm u$	$v = \pi \pm u$	$v = \frac{3\pi}{2} \pm u$	$v = 2\pi - u$	$v = -u$
$\sin v$	$\cos u$	$\mp \sin u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$-\sin u$
$\cos v$	$\mp \sin u$	$-\cos u$	$\pm \sin u$	$\cos u$	$\cos u$
$\operatorname{tg} v$	$\mp \operatorname{cotg} u$	$\pm \operatorname{tg} u$	$\mp \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{tg} u$	$-\operatorname{tg} u$
$\operatorname{cotg} v$	$\mp \operatorname{tg} u$	$\pm \operatorname{cotg} u$	$\mp \operatorname{tg} u$	$-\operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cotg} u$

#### 4.10. Expresiile funcțiilor $\sin^2 u$ , $\cos^2 u$ , $\operatorname{tg}^2 u$ și $\operatorname{cotg}^2 u$ în funcție de pătratul unei funcții trigonometrice fundamentale

	$\sin^2 u$	$\cos^2 u$	$\operatorname{tg}^2 u$	$\operatorname{cotg}^2 u$
$\sin^2 u$		$1 - \cos^2 u$	$\frac{\operatorname{tg}^2 u}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$	$\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 u}$
$\cos^2 u$	$1 - \sin^2 u$		$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 u}$	$\frac{\operatorname{cotg}^2 u}{1 + \operatorname{cotg}^2 u}$
$\operatorname{tg}^2 u$	$\frac{\sin^2 u}{1 - \sin^2 u}$	$\frac{1 - \cos^2 u}{\cos^2 u}$		$\frac{1}{\operatorname{cotg}^2 u}$
$\operatorname{cotg}^2 u$	$\frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u}$	$\frac{\cos^2 u}{1 - \cos^2 u}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 u}$	



Tabela 4.2. Valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale ale cîteva unghiuri

Cadrantul	Unghiul $u$	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cotg} u$
I	$0^\circ$	0	1	0	nu este definită
	$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
	$18^\circ = \frac{\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	$72^\circ = \frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	nu este definită	0	
II	$108^\circ = \frac{3\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
	$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1
	$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$162^\circ = \frac{9\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
	$180^\circ = \pi$	0	-1	0	nu este definită
III	$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
	$240^\circ = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	nu este definită	0
IV	$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
	$360^\circ = 2\pi$	0	1	0	nu este definită

Tabla 4.3 Funcțiile trigonometrice exprimate cu ajutorul uneia dintre ele

Funcția necunoscută / Funcția cunoscută	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{cotg} u$	$\operatorname{sec} u$	$\operatorname{cosec} u$
$\sin u$	$\sin u$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 u}$	$\pm \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 u}}{\sin u}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}$	$\frac{1}{\sin u}$
$\cos u$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 u}$	$\cos u$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 u}}{\cos u}$	$\pm \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \cos^2 u}}$	$\frac{1}{\cos u}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 u}}$
$\operatorname{tg} u$	$\pm \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\operatorname{tg} u}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}{\operatorname{tg} u}$
$\operatorname{cotg} u$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 u}}$	$\pm \frac{\operatorname{cotg} u}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 u}}$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} u}$	$\operatorname{cotg} u$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 u}}{\operatorname{cotg} u}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 u}$
$\operatorname{sec} u$	$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{sec}^2 u - 1}}{\operatorname{sec} u}$	$\frac{1}{\operatorname{sec} u}$	$\pm \sqrt{\operatorname{sec}^2 u - 1}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sec}^2 u - 1}}$	$\operatorname{sec} u$	$\pm \frac{\operatorname{sec} u}{\sqrt{\operatorname{sec}^2 u - 1}}$
$\operatorname{cosec} u$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} u}$	$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}}{\operatorname{cosec} u}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}}$	$\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}$	$\pm \frac{\operatorname{cosec} u}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1}}$	$\operatorname{cosec} u$

Tabela 4.4 Funcțiile trigonometrice fundamentale ale unor sume și diferențe de unghiuri

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v; \quad \cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}; \quad \operatorname{cotg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v \mp 1}{\operatorname{cotg} v \pm \operatorname{cotg} u}$$

$$\sin(u + v + w) = \sin u \cos v \cos w + \sin v \cos w \cos u + \sin w \cos u \cos v - \sin u \sin v \sin w$$

$$\cos(u + v + w) = \cos u \cos v \cos w - \sin u \sin v \cos w - \sin v \sin w \cos u - \sin u \sin w \cos v$$

$$\operatorname{tg}(u + v + w) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v \cdot \operatorname{tg} w}{1 - (\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w + \operatorname{tg} w \operatorname{tg} u)}$$

$$\operatorname{cotg}(u + v + w) = \frac{\operatorname{cotg} u \cdot \operatorname{cotg} v \cdot \operatorname{cotg} w - \operatorname{cotg} u - \operatorname{cotg} v - \operatorname{cotg} w}{\operatorname{cotg} u \cdot \operatorname{cotg} v + \operatorname{cotg} v \operatorname{cotg} w + \operatorname{cotg} w \operatorname{cotg} u - 1}$$

Tabela 4.5. Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice fundamentale în sume de funcții trigonometrice corespunzătoare

$$\sin u \cos v = \frac{\sin(u + v) + \sin(u - v)}{2}; \quad \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v}$$

$$\cos u \cos v = \frac{\cos(u + v) + \cos(u - v)}{2}; \quad \operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v = \frac{\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}$$

$$\sin u \sin v = \frac{\cos(u - v) - \cos(u + v)}{2}; \quad \operatorname{cotg} u \operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{cotg} u + \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{cotg} v}$$

$$4 \sin u \sin v \sin w = \sin(u + v - w) + \sin(-u + v + w) + \sin(u - v + w) - \sin(u + v + w)$$

$$4 \sin u \cos v \cos w = \sin(u + v - w) - \sin(-u + v + w) + \sin(u - v + w) + \sin(u + v + w)$$

$$4 \sin u \sin v \cos w = -\cos(u + v - w) + \cos(-u + v + w) + \cos(u - v + w) - \cos(u + v + w)$$

$$4 \cos u \cos v \cos w = \cos(-u + v + w) + \cos(u - v + w) + \cos(u + v - w) + \cos(u + v + w)$$

## 4.11. Funcțiile trigonometrice ale jumătății, dublului și triplului unui unghi

Funcția căutată	Expresia ei
-----------------	-------------

*Funcțiile trigonometrice fundamentale ale jumătății unghiului*

$$\begin{array}{l} \sin \frac{u}{2} \\ \cos \frac{u}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{u}{2} \\ \operatorname{cotg} \frac{u}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin u} - \sqrt{1 - \sin u}). \\ \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin u} + \sqrt{1 - \sin u}). \\ \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}}{\operatorname{tg} u} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}} \\ \frac{1}{-\operatorname{cotg} u \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 u + 1}} = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \frac{1 + \cos u}{\sin u} = \\ = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{1 - \cos u}}. \end{array} \right.$$

*Funcțiile trigonometrice fundamentale ale dublului unghiului*

$$\begin{array}{l} \sin 2u \\ \cos 2u \\ \operatorname{tg} 2u \\ \operatorname{cotg} 2u \\ \sec 2u \\ \operatorname{cosec} 2u \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin u \cos u = \pm 2 \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u} = \pm 2 \cos u \sqrt{1 - \cos^2 u} \\ \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u. \\ \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} \\ \frac{\operatorname{cotg}^2 u - 1}{2 \operatorname{cotg} u} \\ \frac{\sec^2 u}{2 - \sec^2 u} \\ \pm \frac{\sec^2 u}{2 \sqrt{\sec^2 u - 1}}. \end{array} \right.$$

*Funcțiile trigonometrice fundamentale ale triplului unghiului*

$$\begin{array}{l} \sin 3u \\ \cos 3u \\ \operatorname{tg} 3u \\ \operatorname{cotg} 3u \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 \sin u \cos^2 u - \sin^3 u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u. \\ \cos^3 u - 3 \cos u \sin^2 u = 4 \cos^3 u - 3 \cos u. \\ \frac{3 \operatorname{tg} u - \operatorname{tg}^3 u}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 u} \\ \frac{\operatorname{cotg}^3 u - 3 \operatorname{cotg} u}{3 \operatorname{cotg}^2 u - 1} \end{array} \right.$$

*Alte formule utile:*

$$\sin 4u = 2 \sin 2u \cdot \cos 2u; \quad \cos 4u = 8 \cos^4 u - 8 \cos^2 u + 1.$$

## 4.12. Linearizarea unor puteri ale sinusului și cosinusului

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}; \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}.$$

$$\sin^3 u = \frac{3 \sin u - \sin 3u}{4}; \quad \cos^3 u = \frac{3 \cos u + \cos 3u}{4}.$$

$$\sin^4 u = \frac{-4 \cos 2u + \cos 4u}{8}; \quad \cos^4 u = \frac{3 + 4 \cos 2u + \cos 4u}{8}.$$

$$\sin^5 u = \frac{10 \sin u - 5 \sin 3u + \sin 5u}{16}; \quad \cos^5 u = \frac{10 \cos u + 5 \cos 3u + \cos 5u}{16}.$$

$$\sin^6 u = \frac{10 - 15 \cos 2u + 6 \cos 4u - \cos 6u}{32}.$$

$$\cos^6 u = \frac{10 + 15 \cos 2u + 6 \cos 4u + \cos 6u}{32}.$$

$$\sin^7 u = \frac{35 \sin u - 21 \sin 3u + 7 \sin 5u - \sin 7u}{64}.$$

$$\cos^7 u = \frac{35 \cos u + 21 \cos 3u + 7 \cos 5u + \cos 7u}{64}.$$

$$\sin^8 u = \frac{35 - 56 \cos 2u + 28 \cos 4u - 8 \cos 6u + \cos 8u}{128}.$$

$$\cos^8 u = \frac{35 + 56 \cos 2u + 28 \cos 4u + 8 \cos 6u + \cos 8u}{128}.$$

## 4.13. Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul tangentei jumătății unghiului

$$\sin u = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \operatorname{cotg} u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

$$\cos u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \sec u = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}.$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{1 + t^2}{2t}, \text{ unde } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

#### 4.14. Formule de transformare a unor sume de funcții trigonometrice în produse (Formule calculabile prin logaritmi)

$$\sin u \pm \sin v = 2 \sin \frac{u \pm v}{2} \cos \frac{u \mp v}{2}; \quad \cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}.$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} = 2 \sin \frac{v+u}{2} \sin \frac{v-u}{2}.$$

$$\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v = \frac{\sin(u \pm v)}{\cos u \cos v}; \quad \operatorname{cotg} u \pm \operatorname{cotg} v = \frac{\sin(v \pm u)}{\sin u \sin v}.$$

$$1 - \cos u = 2 \sin^2(u/2); \quad 1 + \cos u = 2 \cos^2(u/2); \quad 1 \pm \sin 2u = (\sin u \pm \cos u)^2.$$

$$1 \pm \sin u = \sin \frac{\pi}{2} \pm \sin u = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \pm \frac{u}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{u}{2} \right).$$

$$1 \pm \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \pm \operatorname{tg} u = \sqrt{2} \frac{\sin \left( \frac{\pi}{4} \pm u \right)}{\cos u}.$$

$$A \sin u + B \cos u = A \left( \sin u + \frac{B}{A} \cos u \right) = A (\sin u + \operatorname{tg} \varphi \cos u) = A \frac{\sin(u + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

(s-a introdus unghiul auxiliar  $\varphi$ , definit de  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$ ,  $\varphi \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ .)

$$A \pm B = A \left( 1 \pm \frac{B}{A} \right) = A (1 \pm \operatorname{tg} \varphi) = A \sqrt{2} \frac{\sin \left( \frac{\pi}{4} \pm \varphi \right)}{\cos \varphi}; \quad \text{dacă } A > 0.$$

$B > 0$ , atunci se poate lua  $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2 \varphi$ ,  $\varphi \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ .

$$\cos u \pm \sin u = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} \pm u \right) = \sqrt{2} \left( \cos \mp \frac{\pi}{4} \right).$$

#### 4.15. Identități pentru funcțiile trigonometrice ale unghiurilor $A, B, C$ ale unui triunghi oarecare

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin^2 C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$$

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

$$\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C - 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A = 1.$$

#### 4.16. Inegalități verificate de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare și de alte elemente ale acestuia.

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq 1$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$8 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} < 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$8 \cos A \cos B \cos C \leq 1$$

$$1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A \geq 9$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$$

$$p \geq 3 \cdot R \sqrt{\sin A \sin B \sin C}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4 \sqrt{3} S$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

#### 4.17. Relații între elementele unui triunghi oarecare \*

**Teorema sinusurilor**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

**Teorema cosinusurilor:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**Teorema tangentelor**

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C+A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B} = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C} = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c \sin A}{b - c \cos A} = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}$$

**Teorema proiecțiilor**

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

\* A se vedea și paragraful 3.1.1 de la capitolul Geometrie



Formulele lui Karl Mollweide:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{B}{2}}$$

Alte relații importante:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p(p-c)}}$$

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C$$

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$p-a = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$p-b = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$p-c = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$h_a = 2R \sin B \sin C; \quad h_b = 2R \sin C \sin A, \quad h_c = 2R \sin A \sin B$$

$$r_a = r + a \operatorname{tg} \frac{A}{2}; \quad r_b = r + b \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad r_c = r + c \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$\ominus H = R \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}.$$

Tabela 4.6. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

Cazul	Date	Necunoscutele	Formule de rezolvare			
I	$A = 90^\circ$	$B$ $C$	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$	$S = \frac{1}{2} bc$
	$b$ $c$	$a$ $S$	$\operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}$	$\operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}$	$a = b \sec C = \frac{b}{\cos C}$	
II	$A = 90^\circ$	$B$ $C$	$\sin B = \frac{b}{a}$	$\cos C = \frac{b}{a}$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$S = \frac{1}{2} b \sqrt{(a+b)(a-b)} =$ $= \frac{1}{2} ab \sin C$
	$a$ $b$	$c$ $S$	$C = 90^\circ - B$	$B = 90^\circ - C$	$c = \sqrt{(a+b)(a-b)} =$ $= a \cos B$	
III	$A = 90^\circ$	$C$ $B$	$C = 90^\circ - B$	$b = a \sin B$	$c = a \sin C$	$S = \frac{1}{4} a^2 \sin 2B$
	$B$ $a$	$b$ $c$ $S$		$b = a \cos C$	$c = a \cos B$	
IV	$A = 90^\circ$	$C$ $B$	$C = 90^\circ - B$	$a = \frac{b}{\sin B}$	$c = b \operatorname{tg} C$	$S = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{cotg} B$
	$B$ $b$	$a$ $c$ $S$		$a = \frac{b}{\cos C}$	$c = b \operatorname{cotg} B$	

Tabela 4.7. Rezolvarea triunghiurilor oarecare

Cazul	Date	Necunoscutele	Formule de rezolvare			
I	$B$ $C$ $a$	$A$ $b$ $c$ $S$	$A = 180^\circ - (B + C)$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$	$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$	$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} =$ $= \frac{ab \sin C}{2}$
	$A$ $B$ $a$	$C$ $b$ $c$ $S$	$C = 180^\circ - (A + B)$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$	$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$	$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$
II	$C$ $a$ $b$	$A$ $B$ $c$ $S$	$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$ $A + B = 180^\circ - C$		$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$	$S = \frac{ab \sin C}{2}$
III	$A$ $a$ $b$	$B$ $C$ $c$ $S$	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$	$C = 180^\circ - (A + B)$	$c = \frac{a \sin C}{\sin A} =$ $= b \cos A \pm$ $\pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$	$S = \frac{bc \sin A}{2} =$ $= \frac{b \sin A}{2} (b \cos A \pm$ $\pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 A})$

Cazul	Date	Necunoscute	Formule de rezolvare
IV	$a$ $b$ $c$ $a + b + c = 2p$	$A$ $B$ $C$ $S$	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ <p>Ca verificare: <math>A + B + C = 180^\circ</math></p>

În cazul III putem avea drept soluție: două triunghiuri, un triunghi sau nici un triunghi, cu datele  $A, a, b$ .

În adevăr, apariția radicalului  $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$  în expresia lui  $c$  impune o discuție a semnelui cantității de sub radical. Această discuție, rezumată, este:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $A > 90^\circ$ ;<br>$a > b \rightarrow$ un singur triunghi<br>$a \leq b \rightarrow$ nici un triunghi | 3. $A < 90^\circ$<br>$\alpha) a < b \sin A \Rightarrow$ nici un triunghi<br>$\beta) a = b \sin A \rightarrow$ un triunghi dreptunghic                                  |
| 2. $A = 90^\circ$<br>$a > b \rightarrow$ un singur triunghi<br>$a \leq b \Rightarrow$ nici un triunghi   | $\gamma) a > b \sin A: \begin{cases} a > b \rightarrow$ un singur triunghi<br>$a = b \rightarrow$ un singur triunghi isoscel<br>$a > b \rightarrow$ un singur triunghi |

#### 4.18. Produse. Sume. Inegalități și identități remarcabile

$$1. \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

$$2. \sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2}$$

$$3. \sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

$$4. \cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

$$5. \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{3\pi}{4n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

$$6. \cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$$

$$7. \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}, & n \text{ impar} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}, & n \text{ par} \end{cases}$$

$$8. \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

$$9. (2 \cos x - 1)(2 \cos 2x - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1} x - 1) = \\ = \frac{2 \cos 2^n x - 1}{2 \cos x + 1}, \quad \cos x \neq -\frac{1}{2}$$

\* \* \*

$$10. \sin x + \sin(x+h) + \sin(x+2h) + \dots + \sin(x+nh) = \\ = \frac{\sin \frac{n+1}{2} h \sin \left(x + \frac{nh}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}, \quad h \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$11. \cos x + \cos(x+h) + \cos(x+2h) + \dots + \cos(x+nh) = \\ = \frac{\sin \frac{n+1}{2} h \cos \left(x + \frac{nh}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}, \quad h \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$12. \sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}, \quad \sin x \neq 0$$

$$13. \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x}, \quad \sin x \neq 0$$

$$14. \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x + \dots + \operatorname{tg}(2^{n-1}x) + \operatorname{cotg}(2^{n-1}x) = \\ = 2[\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(2^n x)]$$

$$15. \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{cotg} 2x$$

$$16. 1 + a \cos x + a^2 \cos 2x + \dots + a^n \cos nx = \\ = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos(n+1)x - a \cos x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1}$$

$$17. a \sin x + a^2 \sin 2x + \dots + a^n \sin nx = \\ = \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin(n+1)x + a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}$$

$$18. \operatorname{arctg} \frac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+2+2^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2} = \\ = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}'$$

$$19. \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+2}, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

$$20. \frac{4\pi^2}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

$$21. \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \dots + \cos \frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$$

$$22. \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$23. 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{139} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Machin})$$

$$24. \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

\* \* \*

$$25. \forall x \in \mathbf{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$$

$$26. \forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

$$27. 0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}, \quad \sin(x + y + z) < \sin x + \sin y + \sin z$$

## 4.19. Funcții trigonometrice inverse<sup>1</sup>

Relații între funcțiile trigonometrice inverse:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arcsin} x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \\ \operatorname{arcsin} x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & x \in [0, 1] \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0] \end{cases} \\ \operatorname{arcsin} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (0, 1] \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in [-1, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R} \\ \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in [0, +\infty) \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty, 0] \end{cases} \\ \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

<sup>1</sup> A se vedea paragraful „Funcții elementare“.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{arc cos } x = \begin{cases} \text{arc sin } \sqrt{1-x^2}, & x \in [0, 1] \\ \pi - \text{arc sin } \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0] \end{cases} \\ \text{arc cos } x = \begin{cases} \text{arc tg } \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (0, 1] \\ \pi + \text{arc tg } \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in [-1, 0) \end{cases} \\ \text{arc cos } x = \text{arc ctg } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{arc ctg } x = \begin{cases} \text{arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in [0, +\infty) \\ \pi - \text{arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty, 0] \end{cases} \\ \text{arc ctg } x = \begin{cases} \text{arc tg } \frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \\ \pi + \text{arc tg } \frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \\ \text{arc ctg } x = \text{arc cos } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R} \end{array} \right.$$

*Formule de adunare*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc cos } (\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy), \quad 0 < x, y < 1 \\ \text{arc sin } x - \text{arc sin } y = \text{arc sin } (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), \quad 0 < x, y < 1 \\ \text{arc cos } x + \text{arc cos } y = \text{arc cos } (xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}), \quad 0 < x, y < 1 \\ \text{arc cos } x - \text{arc cos } y = \text{arc sin } (y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}), \quad 0 < x, y < 1 \\ \text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \text{arc ctg } \frac{1-xy}{x+y}, \quad x, y > 0 \\ \text{arc tg } x - \text{arc tg } y = \text{arc tg } \frac{x-y}{1+xy}, \quad x, y > 0 \\ \text{arc ctg } x + \text{arc ctg } y = \text{arc cotg } \frac{xy-1}{x+y}, \quad x, y > 0 \\ \text{arc ctg } x - \text{arc ctg } y = \text{arc tg } \frac{y-x}{1+xy}, \quad x > 0, y > 0 \end{array} \right.$$

#### 4.20. Condiții necesare și suficiente ca valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale corespunzătoare la două unghiuri $u$ și $v$ să fie egale

- Teoremă:*
- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$  sau  $u = \pi - v + 2 \cdot l\pi$ ,  $k, l \in \mathbf{Z}$
  - $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + 2k\pi$  sau  $u = -v + 2 \cdot l\pi$ ,  $k, l \in \mathbf{Z}$
  - $\text{tg } u = \text{tg } v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $u \neq \frac{\pi}{2} + m$ ,  $v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  
 $m, n \in \mathbf{Z}$
  - $\text{ctg } u = \text{ctg } v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $u \neq m\pi$ ,  $v \neq n\pi$ ,  $m, n \in \mathbf{Z}$

Tabela 4.8. Ecuații trigonometrice fundamentale

Ecuația	Discuție după $a$	Mulțimea soluțiilor $S$
$\sin x = a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
		sau
		$S = (\arcsin a + 2\mathbf{Z}\pi) \cup (\pi - \arcsin a + 2\mathbf{Z}\pi)$
		sau
	$ a  > 1$	$\begin{cases} x' = \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \\ x'' = \pi - \arcsin a + 2l\pi, l \in \mathbf{Z} \end{cases}$
	$a = -1$	$S = -\frac{\pi}{2} + 2\mathbf{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \mathbf{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = \frac{\pi}{2} + 2\mathbf{Z}\pi$
$\cos x = a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$-1 < a < 1$	$S = \{x \mid x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
		sau
		$S = (\arccos a + 2\mathbf{Z}\pi) \cup (-\arccos a + 2\mathbf{Z}\pi)$
		sau
	$ a  > 1$	$\begin{cases} x' = \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \\ x'' = -\arccos a + 2l\pi, l \in \mathbf{Z} \end{cases}$
	$a = -1$	$S = \pi + 2\mathbf{Z}\pi$
	$a = 0$	$S = \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
	$a = 1$	$S = 2\mathbf{Z}\pi$

Ecuafia	Discuție după $a$	Mulțimea soluțiilor $S$
$\operatorname{tg} x = a$ $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$ $a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$  $a = -1$  $a = 0$  $a = 1$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \mathbb{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  $S = -\frac{\pi}{4} + \mathbb{Z}\pi$  $S = \mathbb{Z}\pi$  $S = \frac{\pi}{4} + \mathbb{Z}\pi$
$\operatorname{cotg} x = a$ $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ $a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$  $a = -1$  $a = 0$  $a = 1$	$S = \{x \mid x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ sau $S = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} a + \mathbb{Z}\pi$ sau $x = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  $x = \frac{3\pi}{4} + \mathbb{Z}\pi$  $x = \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$  $x = \frac{\pi}{4} + \mathbb{Z}\pi$

Exemple: 1)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$





$$2) \cos x = \frac{1}{3}; \begin{cases} x' = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sau} \\ x'' = -\operatorname{arc} \cos \frac{1}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3)  $\operatorname{tg} x = -4$ ;  $x = -\operatorname{arctg} 4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



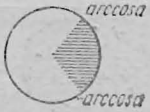


4)  $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .


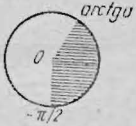

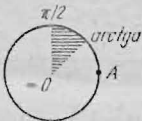
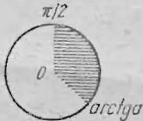


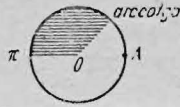


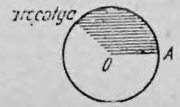
## 4.21 Inecuații trigonometrice fundamentale

Nr. crt.	Inecuația	Discuție	Mulțimea soluțiilor	Figura
1	$\sin x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$-1 < a < 0$	$\{x \mid \pi - \arcsin a + 2k\pi < x < 2\pi + \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	
		$0 \leq a \leq 1$	$\{x \mid \pi - \arcsin a + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \cup$ $\cup \{x \mid 2l\pi < x < \arcsin a + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}\}$	
		$a > 1$	$\mathbf{R}$	
		$a \leq -1$	$\emptyset$	

2	$\sin x > a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$0 \leq a < 1$	$\{x \mid \arcsin a + 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}\}$	
		$-1 \leq a < 0$	$\{x \mid 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \cup$ $\emptyset \{2\pi + \arcsin a + 2\pi l < x < 2\pi + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}\}$	
		$a < -1$	$\mathbb{R}$	
		$a \geq 1$	$\emptyset$	
3	$\cos x < a$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$	$-1 < a \leq 0$	$\{x \mid \arccos a + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos a + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}\}$	
		$0 < a \leq 1$	$\{x \mid \arccos a + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos a + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}\}$	

Nr. crt:	Inecuația	Discuție	Mulțimea soluțiilor	Figura
	$\cos x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a > 1$	$\mathbf{R}$	
		$a \leq -1$	$\emptyset$	
4	$\cos x > a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$0 < a < 1$	$\{x \mid 2k\pi < x < 2k\pi + \arccos a, k \in \mathbf{Z}\} \cup$ $\cup \{x \mid 2\pi - \arccos a + 2\pi l < x < 2\pi + 2\pi l, l \in \mathbf{Z}\}$	
		$-1 < a < 0$	$\{x \mid 2k\pi < x < \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \cup$ $\cup \{2\pi - \arccos a + 2\pi l < x < 2\pi + 2\pi l, l \in \mathbf{Z}\}$	
		$a < -1$	$\mathbf{R}$	

		$a > 1$	$\emptyset$	
5	$\operatorname{tg} x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a > 0$	$\left\{ x \mid -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$	
		$a < 0$	$\left\{ x \mid -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$	
6	$\operatorname{tg} x > a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a \geq 0$	$\left\{ x \mid \operatorname{arctg} a + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$	
		$a < 0$	$\left\{ x \mid \operatorname{arctg} a + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$	

Nr. crt.	Inecuația	Discuție	Mulțimea soluțiilor	Figura
7	$\cotg x < a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a > 0$	$\{x \mid \text{arc ctg } a + k\pi < x < \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	
		$a < 0$	$\{x \mid \text{arc ctg } a + \pi k < x < \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	
8	$\cotg x > a$ $x \in \mathbf{R}$ $a \in \mathbf{R}$	$a \geq 0$	$\{x \mid \pi k < x < \text{arc ctg } a + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	
		$a < 0$	$\{x \mid \pi k < x < \text{arc ctg } a + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	

## 4.22. Aplicații ale trigonometriei

1. *Determinarea distanței dintre două puncte accesibile (A și B) despărțite printr-un obstacol* (fig. 4.4)

Alegem un punct C și măsurăm distanțele  $a$ ,  $b$  și unghiul C. Formula  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$  ne dă distanța căutată.

2. *Determinarea distanței dintre un punct accesibil (A) și altul inaccesibil (B)* (fig. 4.5).

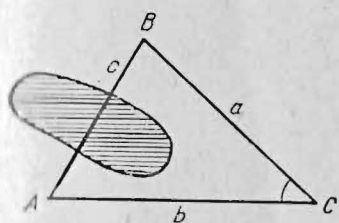


Fig. 4.4

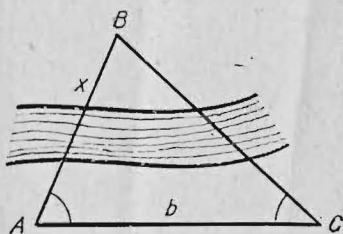


Fig. 4.5

Alegem un punct C, din care să se vadă B, și măsurăm distanța  $b$  dintre C și A și unghiurile C și A. Determinăm apoi distanța  $x$  dintre A și B cu formula  $x = \frac{b \sin C}{\sin(A + C)}$ .

3. *Determinarea distanței dintre două puncte inaccesibile (A și B)* (fig. 4.6). Alegem punctele accesibile C și D și măsurăm distanța  $d$  dintre D și C și unghiurile  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $C_1$  și  $C_2$ .

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul ACD și deducem

$$\overline{AC} = \frac{d \sin(D_1 + D_2)}{\sin(D_1 + D_2 + C_1)}, \text{ respectiv în triunghiul BCD,}$$

$\overline{BC} = \frac{d \sin D_2}{\sin(D_2 + C_1 + C_2)}$ . Acum în triunghiul ABC cunoscând două laturi și unghiul dintre ele, putem determina distanța dintre A și B cu teorema cosinusului.

4. *Determinarea distanței dintre două puncte A și B situate pe aceeași verticală* (fig. 4.7).

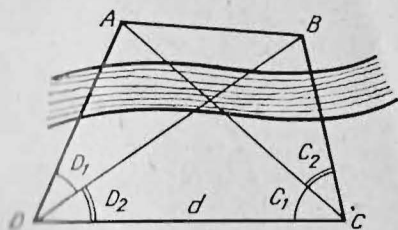


Fig. 4.6

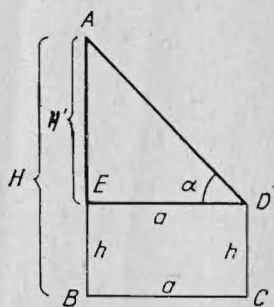


Fig. 4.7

a) *Cazul bazei B accesibile* (fig. 4.7). Alegem un punct  $C$  accesibil și măsurăm distanța  $a$  dintre  $B$  și  $C$  precum și unghiul  $\alpha$ . Cunoaștem înălțimea  $h$  cu ajutorul grafometrului.

Înălțimea căutată este  $H = h + H' = h + a \operatorname{tg} \alpha$ .

b) *Cazul bazei B inaccesibile* (fig. 4.8). Alegem două puncte accesibile  $D$  și  $C$ . Măsurăm distanța  $a$  dintre  $C$  și  $D$  precum și unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ . Deter-

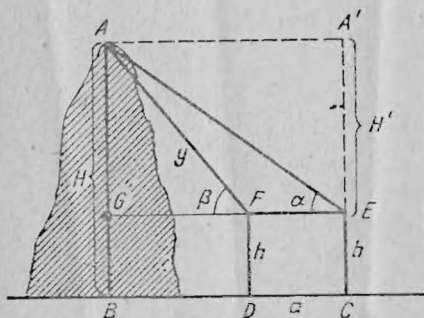


Fig. 4.8

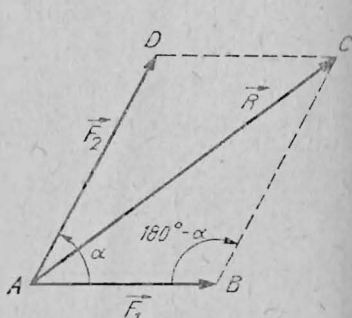


Fig. 4.9

minind cu ajutorul grafometrului distanța  $h$  dintre  $C$  și  $E$ , putem scrie succesiv

$$H = H' + h = h + y \sin \beta, \quad y = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} ;$$

deci

$$H = h + \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} .$$

5. *Determinarea mărimii rezultantei  $\vec{R}$  a două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$*  (fig. 4.9).

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul  $ABC$  și deducem

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|^2 = R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos (180^\circ - \alpha) \text{ sau } R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha .$$

Analog se determină  $|\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos \alpha$ .

6. *Aruncarea oblică a unui corp în vid. Bătăia maximă. Înălțimea maximă.*

Se știe că dacă aruncăm din  $O$  un corp  $M$  sub unghiul  $\alpha$  față de  $Ox$ , cu viteza inițială  $v_0$ , legea de mișcare a corpului  $M(x, y)$  este (fig. 4.10)

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2, \quad t \geq 0 .$$

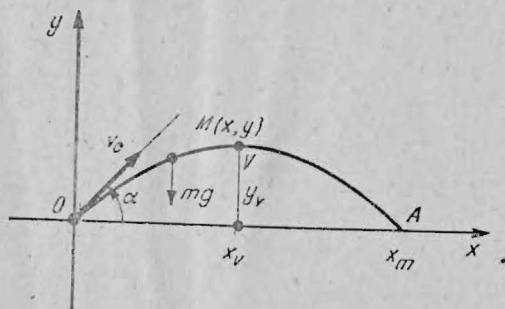


Fig. 4.10

Cind corpul ajunge în  $A$  avem  $y(t) = 0$ . De aici rezultă rădăcinile  $t_1 = 0$  (care corespunde lui  $O$ ) și  $t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$  (care corespunde efectiv lui  $A$ ).

Distanța

$$x(t_2) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

se numește *bătăia* sau *distanță de aruncare*. Avind în vedere că  $\sin 2\alpha$  are valoarea cea mai mare 1 și că ea corespunde lui  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ , rezultă că *bătăia*

$$\text{maximă este } x_m = \frac{v_0^2}{g}.$$

Astfel *bătăia* maximă se obține la o aruncare sub unghiul  $\alpha = 45^\circ$ .

Înălțimea până la care se ridică corpul  $M$  se determină avind în vedere că, în punctul cel mai înalt,  $V$ , al traiectoriei, viteza corpului are componenta  $v_y$  a vitezei nulă.

$$\text{Deci } v_y = \frac{dy}{dt} = 0; \text{ de aici rezultă „} \text{timpul de urcare} \text{” } t_y = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{respectiv înălțimea } y_v = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Evident  $y_v$  este maxim la aruncarea pe verticală ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ); dar pentru,

$$\text{cazul bătăii maxime } (\alpha = 45^\circ), \text{ găsim } y_v = \frac{v_0^2}{4g}.$$

## 4.23. Formule fundamentale pentru funcțiile hiperbolice

*Definiții:* 1) sinusul hiperbolic  $\text{sh } x = (e^x - e^{-x})/2, x \in \mathbb{R}$

2) cosinusul hiperbolic  $\text{ch } x = (e^x + e^{-x})/2, x \in \mathbb{R}$

3) tangenta hiperbolică  $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$

4) cotangenta hiperbolică  $\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \in \mathbb{R}^*$

*Identități fundamentale:* 1)  $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$

2)  $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$

3)  $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

4)  $\text{th } x \cdot \text{cth } x = 1, x \neq 0$

5)  $1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

6)  $\text{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\text{sh}^2 x}, x \neq 0.$



Tabela 4.9. Relații între funcțiile hiperbolice

Funcția căutată	Funcția dată		
	sh $x$	ch $x$	th $x$
sh $x$	sh $x$	$\operatorname{sgn} x \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$	$\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$
ch $x$	$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$	ch $x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$
th $x$	$\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{sgn} x \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$	th $x$
cth $x$	$\frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{sh} x}$	$\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sgn} x \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\operatorname{th} x}, \quad x \neq 0$

Funcțiile hiperbolice ale unor sume și diferențe de argumente

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$$

Fornule de transformare a sumei sau diferenței a două funcții hiperbolice în produse de funcții hiperbolice

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y}$$

Fornule pentru transformarea unor produse de funcții hiperbolice în sume de funcții hiperbolice

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)]$$

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)]$$

$$\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)]$$

### Funcțiile hiperbolice de argument dublu

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

### Funcțiile hiperbolice ale argumentului pe jumătate

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \operatorname{sgn} x \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}; \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}$$

Exprimarea rațională a funcțiilor hiperbolice ale unui argument cu ajutorul tangentei hiperbolice a jumătății argumentului

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{th} x = \frac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}};$$

### Liniarizarea puterilor funcțiilor hiperbolice

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1) \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1)$$

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n &= \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx \\ (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n &= \operatorname{ch} nx - \operatorname{sh} nx \end{aligned} \right\} \text{Teorema lui Moivre}$$

### Relațiile dintre funcțiile trigonometrice și cele hiperbolice

Formulele lui Euler:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ;  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ .

$$1. \sin x = -i \operatorname{sh} ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad 5. \sin ix = i \operatorname{sh} x = i \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2. \cos x = \operatorname{ch} ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad 6. \cos ix = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3. \operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \quad 7. \operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x = i \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$4. \operatorname{ctg} x = i \operatorname{cth} ix = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \quad 8. \operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{cth} x = -i \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

### Paritatea sau imparitatea funcțiilor hiperbolice

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x; \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x, \quad x \neq 0$$

## 4.24. Folosirea tabelii IV.10 și a tabelii IV.11

**Tabela 4.10.** Valorile naturale ale funcțiilor trigonometrice fundamentale ale unghiurilor măsurate în grade sexagesimale

Tabela 4.10 conține valorile funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unghiurilor de la  $0^\circ$  la  $90^\circ$  din  $10'$  în  $10'$ , cu cinci zecimale.

Pentru unghiurile mai mici de  $45^\circ$ , gradele sînt date la stînga fiecărei tabeli, de sus în jos, iar pentru unghiurile mai mari de  $45^\circ$  la dreapta fiecărei tabeli, de jos în sus.

Valorile sinusului pentru unghiurile de la  $0^\circ$  la  $44^\circ$  se citesc de sus în jos în tabela care are scris sus „sinus” și de jos în sus pentru unghiurile de la  $45^\circ$  la  $89^\circ$  în tabela care are scris jos „sinus”. Minutele se citesc sus în primul caz și jos în al doilea caz. La fel se procedează și cu celelalte funcții. Căutarea în tablele este simplă, mai ales dacă unghiul se găsește în tablele.

*Exemplul 1.* Să se afle sinusul unghiului de  $25^\circ 40'$ . Citim în stînga  $25^\circ$  și sus  $40'$  (în tabela 4.10 care are scris sus „sinus”); la intersecția liniei lui  $25^\circ$  cu coloana lui  $40'$  găsim 0,43313.

*Exemplul 2.* Să se afle sinusul unghiului de  $63^\circ 20'$ . Citim în dreapta  $63^\circ$  și jos  $20'$  (în tabela 4.10 care are scris jos „sinus”); la intersecția liniei lui  $63^\circ$  cu coloana lui  $20'$ , găsim 0,89363.

Dacă unghiul nu se găsește în tablele, se face interpolarea prin părți proporționale pentru  $\sin x$  și  $\cos x$ . Pentru  $\operatorname{tg} x$  și  $\operatorname{cotg} x$  avem de făcut următoarele observații:  $\operatorname{tg} x$  se interpolează prin părți proporționale pentru  $x \leq 46^\circ 40'$ . De aici pînă la  $70^\circ$  se obțin numai patru, pînă la  $80^\circ 40'$ , numai trei și pînă la  $85^\circ 40'$  numai două zecimale exacte. O determinare mai precisă o dă formula

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{1}{90^\circ - x} \text{ conexată cu tabela 3.2 a valorilor } \frac{1}{n} 10^3.$$

**Tabela 4.11.** Logaritmii cu cinci zecimale ai funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la  $0^\circ$  pînă la  $90^\circ$  din minut în minut

Tabela 4.11 conține logaritmii funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unghiurilor de la  $0^\circ$  la  $90^\circ$  din minut în minut, precum și logaritmii rapoartelor dintre sinusul sau tangenta unui unghi și unghiul respectiv, pentru unghiurile de la  $0^\circ$  la  $2^\circ 59'$ .

Gradele se caută în partea de sus a paginii și minutele în prima coloană din dreapta dacă unghiul este mai mic de  $45^\circ$ ; dacă unghiul este mai mare de  $45^\circ$ , gradele se găsesc în partea de jos a paginii și minutele în ultima coloană din dreapta. Logaritmii funcțiilor trigonometrice se citesc sus sau în josul paginii, după cum unghiul este mai mic sau mai mare de  $45^\circ$ . Caracteristica comună mai multor logaritmi succesivi este scrisă o singură dată în fiecare grup de zece.

Coloanele notate cu  $+ d 1''$  și  $- d 1''$ , aflate la dreapta fiecărei coloane de logaritmi, conțin diferența dintre logaritmii funcțiilor a două unghiuri care diferă între ele prin  $1''$ . Aceste diferențe s-au obținut împărțind la 60 diferența dintre doi logaritmi consecutivi. Dacă numărul secundelor cu care crește unghiul este mai mare decît 1, partea proporțională a mantisei se obține înmulțind  $d 1''$  cu numărul respectiv de secunde. Semnele  $+$  sau  $-$ , care preced  $d 1''$ , arată că partea proporțională se adună la mantisă sau se scade din ea. Pentru unghiurile de la  $2^\circ$  la  $87^\circ$  se poate evita înmulțirea folosind tablele auxiliare P.P. (tablele părților proporționale) care se găsesc dedesubtul tabelilor principale pentru unghiurile de la  $6^\circ$  la  $83^\circ$  și pe pagina alăturată pentru unghiurile de la  $2^\circ$  la  $6^\circ$  și de la  $83^\circ$  la  $87^\circ$ .

În tabelele P.P. părțile proporționale sînt calculate din secundă i secundă de la 6" la 10"; părțile proporționale pentru 10", 20", 30", 40" și 50" dau, prin împărțirea cu 10, părțile proporționale pentru 1", 2", 3", 4" și 5".

Logaritmul sinusului sau tangentei unui unghi mic de la 0° la 3° nu se poate afla interpolînd prin părți proporționale, deoarece aceasta ar duce la inexactități. Pentru a afla logaritmul sinusului sau tangentei unui asemenea unghi se adună la logaritmul numărului de secunde al unghiului numărul S sau T care reprezintă logaritmul raportului dintre sinus și unghi, respectiv dintre tangentă și unghi. Pentru aceasta se folosesc tabelele mici date sub tabelele de logaritmi ai funcțiilor unghiurilor de la 0° la 3°. Ele conțin numărul de secunde ale unghiului și numerele S și T.

Ca și în cazul calculelor logaritmice obișnuite, și în calculul cu logaritmi funcțiilor trigonometrice sînt de rezolvat două probleme: aflarea logaritmului funcției trigonometrice a unui unghi dat și aflarea unghiului corespunzător unui logaritm dat al unei funcții trigonometrice.

### Problema 1.

Cazul 1. Unghiul se află în tabele (conține numai grade și minute).

*Exemplu.* Să se afle  $\lg \sin 20^{\circ}26'$ . Se caută pe pagina care are scris sus 20°, iar în coloana din stînga 26';  $\lg \sin$  se citește sus, iar la intersecția coloanei acestuia cu linia lui 26' se găsește logaritmul căutat:  $\overline{1,54297}$ .

Cazul 2. Unghiul nu se află în tabele (conține grade, minute și secunde)

*Exemplu.* Să se afle  $\lg \cos 54^{\circ}18'20''$ . Se caută pe pagina care are scris jos 54°, iar în coloana din dreapta 18':  $\lg \cos$  se citește jos, iar la intersecția coloanei acestuia cu linia lui 18' găsim logaritmul  $\overline{1,76607}$ . Căutăm în mod asemănător  $\lg \cos 54^{\circ}19'$  și găsim 1,76590. Logaritmul căutat se află cuprins între acești logaritmi. În coloana — d1" citim 0,28, în tabelele P.P., la intersecția coloanei 0,28 cu linia 20" citim 5,7, deci aproximativ 6. Intrucît d1" are semnul minus, înseamnă că din mantisa logaritmului lui  $54^{\circ}18'$  se scade 6 unități de ordinul al cincilea. Așadar logaritmul căutat este  $\overline{1,76601}$ .

### Problema 2.

Cazul 1. Logaritmul dat se găsește în tabele.

*Exemplu.* Să se afle  $x$  știind că  $\lg x = \overline{1,90371}$ . Logaritmul fiind mai mic decît 0, înseamnă că unghiul este mai mic de 45°. Deci se caută în coloana notată sus „ $\lg \operatorname{tg}$ ”; se găsește  $38^{\circ}42'$ .

Cazul 2. Logaritmul căutat nu se află în tabele.

*Exemplu.* Să se afle  $x$  știind că  $\lg \cotg x = \overline{1,73185}$ . Deoarece logaritmul este negativ, unghiul este mai mare decît 45°.

Căutînd în tabele se deduce că acest logaritm este cuprins între  $\overline{1,73175}$  și  $\overline{1,73205}$ , cărora le corespund unghiurile  $61^{\circ}40'$  și  $61^{\circ}39'$ . În coloana — d1" găsim 0,50. Între  $\overline{1,73185}$  și  $\overline{1,73175}$  diferența este 10. În tabela P.P., în coloana 0,50, se caută 10, căruii îi corespunde în prima coloană din stînga 20". Deci unghiul căutat este de  $61^{\circ}39'20''$ .

## 5. ANALIZĂ MATEMATICĂ

### 5.1. Numerele reale

Mulțimea numerelor reale<sup>1</sup> constituie o mulțime  $\mathbf{R}$ , înzestrată cu două operații binare, notate cu  $+$  (adunarea) și  $\cdot$  (înmulțirea), împreună cu o relație  $\leq$  (care se citește mai mic decât sau egal cu), avînd proprietățile:

1.  $(\mathbf{R}, +)$  este grup comutativ, adică:

1.1.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$  avem  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .

1.2.  $\exists 0 \in \mathbf{R}$ , astfel încît  $\forall x \in \mathbf{R}$  avem  $x + 0 = 0 + x = x$ .

1.3.  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\exists x' \in \mathbf{R}$ , astfel încît  $x + x' = x' + x = 0$ ;  $x'$  se numește opusul lui  $x$  și se notează cu  $-x$ .

1.4.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  avem  $x + y = y + x$ .

2.  $(\mathbf{R}^*, \cdot)$  unde  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$  este grup comutativ, adică:

2.1.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^*$  avem  $x(yz) = (xy)z$ .

2.2.  $\exists 1 \in \mathbf{R}^*$ , astfel încît  $\forall x \in \mathbf{R}^*$ , avem  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ .

2.3.  $\forall x \in \mathbf{R}^*$ ,  $\exists x' \in \mathbf{R}^*$  astfel încît  $xx' = x'x = 1$ ;  $x'$  se numește inversul lui  $x$  și se notează cu  $x^{-1}$  sau  $\frac{1}{x}$ .

2.4.  $\forall x, y \in \mathbf{R}^*$  avem  $xy = yx$ .

3. Adunarea și înmulțirea sînt compatibile între ele, adică

3.1.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$  avem  $x(y + z) = xy + xz$

3.2.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$  avem  $(x + y)z = xz + yz$ .

4. Relația  $\leq$  este o relație de ordine totală compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire:

4.1.  $\forall x \in \mathbf{R}$ , avem  $x \leq x$

4.2.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ,  $x \leq y$  și  $y \leq x$  implică  $x = y$

4.3.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ ,  $x \leq y$  și  $y \leq z$  implică  $x \leq z$

4.4.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  avem  $x \leq y$  sau  $y \leq x$

4.5.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  și  $x \leq y$  avem  $x + z \leq y + z$ ,  $\forall z \in \mathbf{R}$

4.6.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  și  $x \leq y$  avem  $xz \leq yz$ ,  $\forall z \geq 0$ .

<sup>1</sup>) Numelele reale pot fi introduse și cu ajutorul tăieturilor în mulțimea numerelor raționale (Dedekind), al șirurilor fundamentale de numere raționale (Cantor) și al fracțiilor zecimale infinite (Weierstrass), nu numai pe cale axiomatică.

5.  $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$  satisface axioma lui Arhimede:  
 $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, y > 0, \exists n \in \mathbf{N}$  astfel încît  $ny > x$ .

6. Oricare ar fi  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale crescător și  $(b_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale descrescător, pentru care  $a_n \leq b_m, \forall n, m \geq 1$  și  $b_n - a_n \rightarrow 0$  atunci există un singur număr  $c \in \mathbf{R}$ , astfel încît  $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \geq 1$ .

Observația 1. Axiomele de la 1—3 ne arată că  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  este un corp comutativ.

Axiomele 4.1—4.4 ne arată că relația  $\leq$  este o relație de ordine totală, iar cele de la 4.5—4.6 că relația  $\leq$  este compatibilă cu structura de corp, a lui  $\mathbf{R}$ .

Observația 2. În locul axiomei 5—6 se poate lua axioma

5'. Orice mulțime nevidă  $E \subset \mathbf{R}$  majorată (i.e.<sup>1)</sup>  $\exists b \in \mathbf{R}$ , astfel încît  $\forall x \in E$  avem  $x \leq b$ ) posedă margine superioară.

Observația 3. Rezultă astfel că  $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$  este un corp ordonat continuu arhimedian (sau complet ordonat).

### 5.1.1 Submulțimi ale lui $\mathbf{R}$

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}, \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}; \mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^* \right\}; \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}; \quad \mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$$

### 5.1.2 Proprietăți ale numerelor reale, deduse din axiome

1.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$  și  $x + z = y + z$  avem  $x = y$ .
2.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  avem  $-(x + y) = -x + (-y) = -x - y$ .
3.  $\forall x \in \mathbf{R}$  avem  $-(-x) = x$ .
4.  $\forall a, b \in \mathbf{R}$  ecuația  $a + x = b$  are soluția unică  $x = b - a \in \mathbf{R}$ .
5.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$  avem  $(x + y) - z = x + (y - z)$  și  $x - (y + z) = (x - y) - z$ .
6.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, z \neq 0$  și  $xz = yz$  avem  $x = y$ .
7.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  avem  $x(-y) = (-x)y = -xy$  și  $(-x)(-y) = xy$ .
8.  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$  avem  $x(y - z) = xy - xz$ .
9.  $\forall x \in \mathbf{R}$  avem  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ .
- 10<sup>3</sup>.  $\forall x \in \mathbf{R}^*$  avem  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

<sup>1)</sup> i.e. este prescurtarea expresiei latinești „id est“, care se traduce prin „adică“, „aceasta înseamnă“.

<sup>2)</sup>  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ , numărul  $x + (-y)$  se numește *diferența* numerelor  $x$  și  $y$  și se notează  $x - y$ :

<sup>3)</sup>  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  și  $y \neq 0$ , numărul  $x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$  se numește *cîntul împărțirii* lui  $x$  la  $y$  și se notează  $\frac{x}{y}$ .

11.  $\forall x, y \in \mathbf{R}^*$  avem  $(xy)^{-1} = \frac{1}{xy}$ .
12.  $\forall a, b \in \mathbf{R}$  cu  $a \neq 0$ , ecuația  $ax = b$  are soluția unică  $x = \frac{b}{a} \in \mathbf{R}$ .
13.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ , și  $xy = 0$  avem  $x = 0$  sau  $y = 0$ .
14.  $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ,  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$  avem  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$ ;  $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} =$   
 $= \frac{ab}{cd}$ , respectiv  $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd}$
15.  $\forall a \in \mathbf{R}$  și  $b, c, d \in \mathbf{R}^*$  avem  $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$
16.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  avem  $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$ ;  $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$ .
17.  $\forall x, y, z, t \in \mathbf{R}$ ,  $x \leq y$  și  $z \leq t$  rezultă  $x + z \leq y + t$ .
18.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ,  $\forall z \leq 0$  și  $x \leq y$  rezultă  $xz \geq yz$ .
19.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ,  $x > 0$  și  $y < 0$  rezultă  $xy < 0$ .
20.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ,  $x < 0$  și  $y < 0$  rezultă  $xy > 0$ .
21.  $x, y, z, t \in \mathbf{R}_+$ ,  $x \geq y$  și  $z \geq t$ ,  $xz \geq yt$ .
22.  $\forall x \in \mathbf{R}^*$ ,  $x^2 > 0$ .
23.  $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$  avem  $x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$ ;  $x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$ .
24.  $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ .
25.  $\forall x, y \in \mathbf{R}$  și  $x < y$ ,  $\exists r \in \mathbf{Q}$  și  $\rho \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , astfel încât  $x < r < y$  și  $x < \rho < y$ .
26. Mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.
27. Orice șir fundamental de numere reale este convergent și reciproc.
28. Fie  $a \in \mathbf{R}_+$  și  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ . Atunci rădăcina de ordinul  $n$  a lui  $a$  există și este unică.

### 5.1.3. Dreapta încheiată

1. Numerele reale pot fi puse în corespondență bijectivă cu punctele unei drepte pe care au fost alese un punct origine  $O$ , un sens pozitiv și o unitate de măsură pentru lungimi. Din această rațiune, mulțimea  $\mathbf{R}$  se identifică uneori cu dreapta considerată, numind-o *dreapta reală*, iar numerele reale se identifică cu punctele acestei drepte.

2. Fie  $-\infty$  și  $+\infty$  două simboluri. Notăm  $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ . Relația de ordine  $\leq$  a lui  $\mathbf{R}$  se extinde la  $\overline{\mathbf{R}}$  punind  $-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbf{R}$ . Rezultă că  $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$  este total ordonată.

Mulțimea  $\overline{\mathbf{R}}$  se numește *dreapta completată* sau *dreapta încheiată*.

Observații. Pe  $\overline{\mathbf{R}}$  nu se pot introduce structuri algebrice.

### 5.1.4. Intervale numerice

1. Fie  $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$  și  $a < b$ . Mulțimile următoare sînt intervale mărginite ale lui  $\mathbf{R}$ :

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \text{ (interval deschis).}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \text{ (interval închis; compact).}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\} \text{ (interval închis la stînga și deschis la dreapta).}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\} \text{ (interval deschis în stînga și închis în dreapta).}$$

2. Fie  $a \in \mathbf{R}$ . Mulțimile următoare sînt intervale nemărginite ale lui  $\mathbf{R}$ :

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\} \text{ (semidreaptă deschisă la stînga).}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\} \text{ (semidreaptă închisă la stînga).}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\} \text{ (semidreaptă deschisă la dreapta).}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\} \text{ (semidreaptă închisă la dreapta).}$$

Observație. Numerele  $a, b, -\infty, +\infty$  se numesc *capetele intervalelor respective*. Dacă  $I$  este un interval al axei reale, atunci intervalul obținut din  $I$  prin înlăturarea capetelor acestuia se numește *interiorul lui I* și se notează cu  $\overset{\circ}{I}$ .

### 5.1.5. Vecinătate. Punct de acumulare

Definiții. 1. Se numește *vecinătate a lui*  $a \in \mathbf{R}$ , orice mulțime  $V \subset \mathbf{R}$ , care conține un interval deschis, care conține pe  $a$ .

Se numește *vecinătate a lui*  $-\infty$  orice mulțime  $V_{-\infty} \subset \mathbf{R}$  care conține o semidreaptă deschisă la dreapta  $(-\infty, a)$ , cu  $a \in \mathbf{R}$ .

Se numește *vecinătate a lui*  $+\infty$  orice mulțime  $V_{+\infty} \subset \mathbf{R}$  care conține o semidreaptă deschisă la stînga  $(a, +\infty)$ , cu  $a \in \mathbf{R}$ .

2. Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime. Un punct  $x_0 \in \mathbf{R}$  se numește *punct de acumulare* al mulțimii  $E$ , dacă oricare ar fi  $V$  o vecinătate a lui  $x_0$  avem  $V \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ . Mulțimea punctelor de acumulare ale lui  $E$  se notează cu  $E'$  și se numește *mulțimea derivată* a lui  $E$ .

3. Un punct  $x_0 \in \mathbf{R}$  se numește *punct de acumulare la dreapta* (respectiv la stînga) al lui  $E$ , dacă oricare ar fi  $V$  o vecinătate a lui  $x_0$  avem  $V^+ \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$  (respectiv  $V^- \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ ), unde  $V^+ = V \cap [x_0, +\infty)$  (respectiv  $V^- = (-\infty, x_0] \cap V$ ) este o *semivecinătate la dreapta* a lui  $x_0$  (respectiv o *semivecinătate la stînga* a lui  $x_0$ ).

Mulțimea punctelor de acumulare la dreapta ale lui  $E$  se notează cu  $E'^d$ , iar mulțimea punctelor de acumulare la stînga ale lui  $E$  se notează cu  $E'^s$ . Observăm că  $E' = E'^s \cup E'^d$  și că  $E'^s \cap E'^d$  poate fi vidă.

Teoremă. 1)  $x_0 \in E' \Leftrightarrow \exists x_n \in E \setminus \{x_0\}, x_n \rightarrow x_0$ ;  
2)  $x_0 \in E'^s \Leftrightarrow \exists x_n \in E, x_n < x_0, x_n \rightarrow x_0$ ;  
3)  $x_0 \in E'^d \Leftrightarrow \exists x_n \in E, x_n > x_0, x_n \rightarrow x_0$ .

Observație. În mod analog se poate defini noțiunea de punct de acumulare al lui  $E$  în  $\overline{\mathbf{R}}$ .



### 5.1.6. Mulțimi mărginite ale lui $\mathbf{R}$ . Margine superioară. Margine inferioară

*Definiție.* Mulțimea nevidă  $E \subset \mathbf{R}$  se numește majorată sau mărginită superior dacă  $\exists b \in \mathbf{R}$  astfel încât  $\forall x \in E$  avem  $x \leq b$ . Numărul  $b$  se numește majorant pentru  $E$ .

Dacă  $b \in E$  spunem că  $E$  are un cel mai mare element, anume pe  $b$ ; se notează  $b = \max E$ .

Analog, mulțimea  $E \subset \mathbf{R}$  se numește minorată sau mărginită inferior dacă  $\exists a \in \mathbf{R}$ , astfel încât  $\forall x \in E$  avem  $a \leq x$ . Numărul  $a$  se numește minorant pentru  $E$ .

Dacă  $a \in E$ , spunem că  $E$  are un cel mai mic element, anume pe  $a$ ; se notează  $a = \min E$ .

*Exemplu.* Pentru  $E = [1, 3]$ ,  $\min E = 1$  și  $\max E = 3$ . Intervalele deschise ale lui  $\mathbf{R}$  nu posedă min și max.

*Definiție.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime nevidă care admite minoranți. Se numește marginea inferioară\* a lui  $E$  sau infimumul lui  $E$  și se notează  $\inf E$  cel mai mare minorant al lui  $E$ .

*Definiție.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime nevidă, care admite majoranți. Se numește marginea superioară a lui  $E$  sau supremumul lui  $E$  și se notează  $\sup E$  cel mai mic majorant al lui  $E$ .

*Exemplu.* Pentru  $E = \left\{ 3 + \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}$  avem  $\inf E = 3$  și  $\sup E = 4$ ;  
 $\inf \mathbf{R} = -\infty$ .

## 5.2. Inegalități remarcabile

1. Forme ale inegalității lui Bernoulli:

$$\alpha) (1 + a)^n \geq 1 + na, \quad \forall a \in \mathbf{R}, a \geq -1, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

$$\beta) (1 + a)^\alpha \geq 1 + \alpha a, \quad \forall a \in \mathbf{R}, a \geq -1, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \geq 1.$$

$$\gamma) (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R},$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$ , toate aceste numere avînd același semn.

2. Inegalitatea lui Cauchy:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right), \quad \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}.$$

Inegalitatea devine egalitate pentru  $a_i = \lambda b_i$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

3. Inegalitățile lui Minkovski:

$$\alpha) \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}.$$

\*)  $\inf E$  este caracterizat de următoarele două proprietăți:

1)  $\forall x \in E$  avem  $\inf E \leq x$ ;

2)  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists y \in E$ , astfel încât  $y < \varepsilon + \inf E$ ,

iar  $\sup E$  de proprietățile

1')  $\forall x \in E$ , avem  $x \leq \sup E$

2')  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists y \in E$ , astfel încât  $\sup E - \varepsilon < y$ ;

$$\beta) \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}_+, p > 1.$$

$$\gamma) \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad a_i, b_i \in \mathbf{R}_+, 0 < p < 1.$$

$$\delta) [(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)]^{\frac{1}{n}} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 b_2 \dots b_n)^{\frac{1}{n}}, \\ \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}_+, i = \overline{1, n}.$$

4. Inegalitățile mediilor:

$$\frac{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}}{n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

cu  $a_i, i = \overline{1, n}$  numere reale strict pozitive. Inegalitățile devin egalități dacă și numai dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

$$5. \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^k \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^k, \quad \forall k \in \mathbf{N}, n > 1, \forall a_i \in \mathbf{R}_+, i = \overline{1, n}, \text{ egalitatea}$$

are loc dacă și numai dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

6. Inegalitatea lui Hölder pentru sume finite:

$$\alpha) \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R} \text{ și}$$

$1 < p < \infty$ , iar  $q$  se deduce din  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

$$\beta) \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \geq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}, \forall b_1, \dots,$$

$\dots, b_n \in \mathbf{R}^*$  și  $0 < p < 1$ , iar  $q$  se deduce din  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Inegalitatea se transformă în egalitate pentru  $|a_i|^p = \lambda |b_i|^q$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}_+, i = \overline{1, n}$ .

7. Inegalitatea lui Cebîșev: dacă  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  este un șir finit de numere pozitive monoton crescător, iar  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  este un șir finit de numere pozitive monoton descrescător, atunci avem

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k < \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right),$$

excepție făcînd cazul în care  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  sau  $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ , cînd inegalitatea devine egalitate.

Dacă ambele șiruri sînt sau monoton crescătoare sau monoton descrescătoare simultan, atunci avem

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right).$$

8.  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}_+^*, \quad i = \overline{1, n}.$

9.  $\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}_+^*.$

10.  $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}_+^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_1 a_2 \dots a_n = 1$

11. Fie intervalul compact  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , cu  $0 < a < b$  și  $x_1, x_2, \dots, x_n, n$  puncte din acest interval. Atunci avem

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

12.  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}_+^*, \quad i = \overline{1, n}.$

13.  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

14.  $\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{a_1 + \dots + a_n} \cdot \sqrt{b_1 + \dots + b_n}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}_+, \quad i = \overline{1, n}.$

15.  $\frac{n^2 h}{2} < h + 2h + \dots + nh < \frac{(n+1)^2 h}{2}, \quad h > 0, \quad n \geq 1$  (Arhimede).

16.  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \quad n \geq 1.$

17.  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$

18.  $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n+1} - 2, \quad n > 1.$

19.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \geq 1.$

20.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \dots \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}, \quad n \geq 1.$

21.  $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad n \geq 1.$

$$22. \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \geq 1.$$

$$23. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad n \geq 1.$$

$$24. \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 3.$$

$$25. \sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n-1]{n}, \quad n \geq 3.$$

$$26. \sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 3.$$

$$27. n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

$$28. n! < 2^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad n \geq 3.$$

$$29. n! > 2^{n-1}, \quad n \geq 3.$$

$$30. 2^n > n^2, \quad n \geq 10.$$

$$31. \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*, \quad n \geq 1.$$

Inegalitatea devine egalitate dac $\dot{a}$   $a = b$ .

Cazuri particulare importante:

$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*.$$

$$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*.$$

$$8(a^4 + b^4) \geq (a+b)^4, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*.$$

$$32. a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

33.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$ . Inegalitatea devine egalitate dac $\dot{a}$   $\dot{s}$ i numai dac $\dot{a}$   $a = b = c$ .

$$34. a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

$$35. \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \quad ab > 0.$$

$$36. a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \forall a \in \mathbf{R}_+^*.$$

$$37. \frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \quad a > b >$$

$$38. a^3 + b^3 + c^3 > 3abc, \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}_+^*; \quad a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a.$$

$$39. \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

$$40. \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+.$$

$$41. \sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbf{R}_+^*.$$

$$42. \sqrt[3]{(a+d)(b+c)(c+f)} \geq \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{def}, \quad \forall a, b, \dots, f \in \mathbf{R}_+^*.$$

### 5.3. Şiruri de numere reale

*Noţiunea de şir.* Se numeşte şir de numere reale o aplicaţie  $f$  a mulţimii  $\mathbf{N}$  în  $\mathbf{R}$ . Dacă  $a_n = f(n)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ , atunci şirul  $f$  se scrie  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(a_n)$  sau  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ;  $a_n$  se numeşte termenul general al şirului  $f$ .

În locul lui  $\mathbf{N}$  se poate lua  $\mathbf{N}^*$ , în care caz şirul  $f$  se scrie  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ,  $(a_n)$  sau  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

*Exemple de şiruri:* 1)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

2)  $2, 2, 2, \dots, 2, \dots$  (un şir constant)

3)  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$

*Şir finit.* O aplicaţie  $f$  a mulţimii  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  în mulţimea  $\mathbf{R}$  se numeşte şir finit (de numere reale) şi se notează  $(a_k)_{k=1, n}$  sau  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

*Noţiunea de subşir.* Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  este un şir şi  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$  un şir de numere naturale strict crescător, atunci şirul  $(a_{k_n})_{n \geq 1}$  se numeşte subşir al şirului iniţial.

*Şiruri cu limită.* Un şir numeric  $(a_n)_{n \geq 1}$  se numeşte cu limită în  $\overline{\mathbf{R}}$ , dacă  $\exists a \in \overline{\mathbf{R}}$ , cu proprietatea că orice vecinătate a lui  $a$  conţine toţi termenii şirului, începînd de la un anumit rang înainte. Scriem  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  sau  $a_n \rightarrow a$  pentru  $n \rightarrow +\infty$ .

*Şiruri convergente.* Un şir  $(a_n)_{n \geq 1}$  care are limita  $a \in \mathbf{R}$  se numeşte convergent în  $\mathbf{R}$ .

1. Un şir  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge către  $a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ , astfel încît  $\forall n \geq n_\varepsilon$  avem  $|a_n - a| \leq \varepsilon$ .

*Exemplu.* Şirul cu termenul general  $a_n = \frac{n+1}{2n}$ ,  $n \geq 1$ , are limita  $a = \frac{1}{2}$ .

2. Un şir  $(a_n)_{n \geq 1}$  are limita  $+\infty$  (respectiv  $-\infty$ )  $\Leftrightarrow \forall c > 0 \exists n_c \in \mathbf{N}$ , aşa fel încît  $\forall n \geq n_c$  să avem  $a_n \geq c$  (respectiv  $a_n \leq -c$ ).

*Şiruri divergente.* Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.

*Şiruri mărginite.* Şirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit dacă şi numai dacă  $\exists M > 0$ , astfel încît,  $\forall n \in \mathbf{N}$ , să avem  $|a_n| \leq M$ .

*Exemplu.* Şirul  $a_n = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  este mărginit de 1, căci  $|a_n| = 1$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

*Şiruri crescătoare. Şiruri descrescătoare.* Şirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este crescător (respectiv descrescător) dacă  $\forall n \in \mathbf{N}$  avem  $a_n \leq a_{n+1}$  (respectiv  $a_n \geq a_{n+1}$ ). Şirurile crescătoare şi şirurile descrescătoare se numesc şiruri monotone.

*Exemplu.* Şirul definit astfel  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ ,  $n \geq 2$ , este strict crescător.

*Şir fundamental sau şir Cauchy.* Un şir  $(a_n)_{n \geq 1}$  de numere reale se numeşte şir fundamental sau Cauchy dacă  $\forall \varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$  astfel încît  $\forall m, n \geq n_\varepsilon$  să avem  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .

Noţiunea de şir fundamental şi cea de şir convergent de numere reale sînt echivalente.

### 5.3.1. Teoreme fundamentale asupra șirurilor numerice

1. Orice șir convergent de numere este mărginit.

2. (Criteriul majorării). Dacă  $a \in \mathbb{R}$ , iar  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  sînt două șiruri care au proprietatea  $\forall n \geq 1, |a_n - a| \leq \alpha_n$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \rightarrow a$ .

*Exemplu.* Pentru șirul cu termenul general  $a_n = \sin \frac{1}{n}$  avem  $|a_n - 0| \leq \frac{1}{n}$  și, cum  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , rezultă  $a_n \rightarrow 0$ .

3. *Trecerea la limită în inegalități.* Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  două șiruri cu limită pentru care  $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ . Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

4. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  două șiruri astfel încît  $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ . Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  (respectiv  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ ), atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$  (respectiv  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ).

5. Dacă șirul de numere strict pozitive  $(a_n)_{n \geq 1}$  este crescător și nemărginit, atunci  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

*Exemplu.* Șirul cu termenul general  $a_n = 1 + 2^n$  fiind crescător și nemărginit, șirul cu termenul general  $\frac{1}{1 + 2^n} \rightarrow 0$ .

6. Dacă  $a \in \mathbb{R}$  iar șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge către  $a$ , atunci șirul  $(|a_n|)_{n \geq 1}$  converge către  $|a|$ .

7. Dacă șirul  $(|a_n|)_{n \geq 1}$  converge către 0, atunci  $a_n \rightarrow 0$ .

8. (Teorema de convergență a șirurilor monotone). Orice șir monoton și mărginit este convergent (Weierstrass).

*Exemplu.* Șirul definit astfel  $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, n \geq 2$  este strict crescător și mărginit. El are limita  $a = 2$ .

9. *Lema lui Cesaro.* Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

10. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$ , un șir convergent astfel încît  $|a_n| \leq M, \forall n \geq n_0$ ; atunci  $|\lim_{n \rightarrow \infty} a_n| \leq M$ .

11) *Teorema „cleștelui”.* I) Dacă șirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  îndeplinesc condițiile i)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ ; ii)  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

*Exemple.* 1. Șirurile  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  sînt definite astfel:

$$a_0 \in \mathbb{R}, \quad b_0 \in \mathbb{R}, \quad 0 < a_0 < b_0$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = \sqrt{a_0 b_0},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$\dots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}},$$

$$\dots$$

îndeplinesc condițiile din teorema precedentă și au una și aceeași limită (Gauss), media aritmetico-geometrică a numerelor  $a_0$  și  $b_0$ .

2. Șirurile  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$  definite astfel

$$a_0 \in \mathbb{R} \quad b_0 \in \mathbb{R}, \quad a_0 < b_0$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3};$$

$$\dots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3} \quad n \geq 2$$

$$\dots$$

îndeplinesc condițiile i) și ii)  $\left( b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{6^n} \right)$  și au, deci, aceeași limită.

2) Dacă  $a \in \mathbb{R}$ , iar  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ,  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  sînt trei șiruri pentru care  $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$ ,  $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ , și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ , atunci și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

*Exemplu.* Avem evident 
$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}}_{a_n} \leq$$

$$\leq \frac{n}{\underbrace{\sqrt{n^2 + 1}}_{\beta_n}}. \text{ Cum } \alpha_n, \beta_n \rightarrow 1, \text{ rezultă } a_n \rightarrow 1.$$

12) Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir cu limita  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Atunci șirul mediilor aritmetice  $\left( b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$ , cel al mediilor geometrice  $(g_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})$ ,  $a_k > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ) și șirul mediilor armonice  $\left( h_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \right)$ ,  $a_k > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ) au aceeași limită  $a$ .

13) Șirul  $(q^n)_{n \geq 1}$  este convergent dacă și numai dacă  $-1 < q \leq 1$ .

14) *Lema lui Cesaro-Stolz.* Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  două șiruri de numere cu proprietățile

1)  $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .

15) Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  două șiruri convergente. Atunci

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$ .

$$\text{iii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ dac\u0103 } \forall n \geq 1, b_n \neq 0 \text{ \u015fi } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

$$\text{iv) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ dac\u0103 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0 \text{ \u015fi } \forall n \geq 1, a_n > 0.$$

16) Rezultatele de la 15) se extind \u015fi la \u015firurile cu limit\u0103, dac\u0103 facem conven\u012biile:

$$1) a + (+\infty) = (+\infty) + a = a - (-\infty) = -(-\infty) + a = a + \infty = \infty + a = \infty, \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$2) a - (+\infty) = (-\infty) + a = a + (-\infty) = a - \infty = -\infty + a = -\infty \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$3) (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$4) (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty.$$

$$5) a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \pm \infty \text{ dup\u0103 cum } a > 0 \text{ sau } a < 0.$$

$$6) a(-\infty) = (-\infty) \cdot a = \mp \infty, \text{ dup\u0103 cum } a > 0 \text{ sau } a < 0.$$

$$7) (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

$$8) (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

$$9) \frac{a}{\pm \infty} = 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$10) \frac{\pm \infty}{a} = \pm \infty \text{ sau } \mp \infty, \text{ dup\u0103 cum } a > 0 \text{ sau } a < 0$$

$$11) (\pm \infty)^n = (\pm 1)^n \cdot \infty, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$12) a^{+\infty} = +\infty, \text{ dac\u0103 } a > 1 \text{ \u015fi } a^{+\infty} = 0 \text{ dac\u0103 } 0 < a < 1,$$

$$13) a^{-\infty} = 0, \text{ dac\u0103 } a > 1 \text{ \u015fi } a^{-\infty} = +\infty, \text{ dac\u0103 } 0 < a < 1.$$

$$14) \infty^a = \infty, \forall a > 0; \infty^a = 0, \forall a < 0.$$

$$15) 0^{+\infty} = 0; (+\infty)^{+\infty} = +\infty; (+\infty)^{-\infty} = 0.$$

$$16) \sqrt[n]{+\infty} = +\infty; \sqrt[n]{-\infty} = -\infty.$$

$$17) \log_a(+\infty) = +\infty; \log_a 0 = -\infty, \text{ dac\u0103 } a > 1.$$

$$18) \log_a 0 = +\infty, \log_a(+\infty) = -\infty, \text{ dac\u0103 } 0 < a < 1.$$

$$17) \text{ Simbolurile } \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \infty^0, 0^0 \text{ \u015fi } 1^\infty \text{ nu au sens (nu$$

au \u00e2n\u015feles).



18) Limita  $l$  a șirului cu termenul general  $a_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ ,  
unde  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f$  funcție continuă, este  $l = \int_a^b f(x) dx$ .

### 5.3.2. Șiruri remarcabile

1) Șirul lui Fibonacci,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $n \geq 3$ , care are termenul general

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n \geq 1$$

și pentru care avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ numărul „de aur”}$$

2) Șirul care aproximează pe  $\sqrt{a}$ ,  $a > 0$  (Heron), cu termenul general

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left[ a_n + \frac{a}{a_n} \right], \quad n \geq 1, \quad a_1 > 0 \text{ fiind un număr real dat.}$$

3) Șirul cu termenul general

$$a_{n+1} = \frac{1}{p} \left[ (p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}} \right], \quad n \geq 1, \quad a > 0, \quad a \in \mathbf{R}, \quad a_1 > 0, \quad a_1 \in \mathbf{R}, \quad p \in \mathbf{N}$$

$p \geq 2$  care este convergent către  $\sqrt[p]{a}$  (Newton).

4) Șirul lui Traian Lalescu, avînd termenul general

$$a_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

5) Șirul care are drept limită numărul  $e$

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e = 2,7182818284\dots$$

6) Șirul care are drept limită constanta  $\gamma$  a lui Euler

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \gamma = 0,5772156619\dots$$

7) Șirul cu termenul general

$$e_n = \frac{1}{2^n} (a_0 + C_n^1 a_1 + \dots + C_n^n a_n)$$

care are limita  $a$ , dacă șirul convergent de numere  $(a_n)_{n \geq 0}$  are limita  $a$  (Euler)

### 5.3.3. Limite fundamentale de șiruri

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0; \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a, a > 0.$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^p n}{n^a} = 0, a \in \mathbf{R}, a > 0, p \in \mathbf{N}.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a \in \mathbf{R}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} n^p a^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |a| < 1, p \in \mathbf{R}_+ \\ +\infty, & \text{dacă } a > 1, p \in \mathbf{R}_+ \end{cases}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = \begin{cases} \infty, & \text{pentru } a > 1, p \in \mathbf{R}_+ \\ 0, & \text{pentru } |a| \leq 1, p \in \mathbf{R}_+. \end{cases}$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^{\pm n} = e$$

$$11) \lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n > 0}} \left(1 \pm x_n\right)^{\pm \frac{1}{x_n}} = e$$

$$12) \lim_{\substack{y_n \rightarrow \infty \\ y_n > 0}} \left(1 \pm \frac{1}{y_n}\right)^{\pm y_n} = e$$

$$13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}, \forall p \in \mathbf{N}^*$$

$$14) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

$$15) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + \dots + A_p}{B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + \dots + B_q} = \begin{cases} \frac{A_0}{B_0}, & \text{pentru } p = q \in \mathbb{N}; B_0 \neq 0 \\ +\infty, & \text{pentru } \frac{A_0}{B_0} > 0, p > q, \\ -\infty, & \text{pentru } \frac{A_0}{B_0} < 0, p > q, \\ 0, & \text{pentru } p < q. \end{cases}$$

$$16) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Wallis}).$$

### 5.3.4. Șiruri recurente liniare

Termenul general al șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit recurent astfel:

$$\begin{cases} a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \dots + \alpha_k a_n, & n = 1, 2, \dots \\ a_1, a_2, \dots, a_k \text{ fiind cunoscuți;} \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ fiind } k \text{ numere date} \end{cases}$$

se află rezolvînd ecuația caracteristică

$$r^k = \alpha_1 r^{k-1} + \dots + \alpha_k. \quad (1)$$

1. Dacă ecuația (1) are rădăcinile reale și distincte  $r_1, r_2, \dots, r_k$  atunci

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \dots + C_k r_k^n,$$

constantele  $C_1, \dots, C_k$  determinîndu-se din cunoașterea primilor  $k$  termeni  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ai șirului respectiv.

*Exemplu.* Fie un șir definit astfel:  $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ ,  $n \geq 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ; să găsim termenul său general  $a_n$ ; pentru el avem:

$$r^2 = \frac{1}{2}(r+1), \quad r_1 = 1; \quad r_2 = -\frac{1}{2},$$

$$a_n = C_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n C_2; \quad a_1 = 0 \text{ și } a_2 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, \quad C_2 = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right), \quad n \geq 1.$$

2. Dacă ecuația (1) are o rădăcină reală  $r_1$  multiplă de ordinul  $s$ , atunci ea contribuie în expresia lui  $a_n$  (soluția generală) cu  $s$  termeni de forma  $(C_1 + C_2 n + \dots + C_s n^{s-1}) r_1^n$ .

3. Dacă ecuația cu coeficienți reali (1) admite două rădăcini complexe conjugate  $r_{1,2} = \rho (\cos \omega \pm i \sin \omega)$ , atunci ele contribuie în expresia termenului general  $a_n$  cu termenii  $(C_1 \cos n \omega + C_2 \sin n \omega) \rho^n$ .

## 5.4. Serii de numere reale

*Definiție.* Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  de numere reale și șirul  $(S_n)_{n \geq 1}$ , definit astfel  $S_1 = a_1$ ,  $S_2 = a_1 + a_2$ , ...,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

Se numește *serie de numere* perechea de șiruri  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(S_n)_{n \geq 1}$ , care se notează  $\sum_{n \geq 1} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sau  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Termenii șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  se numesc termenii seriei,  $a_n$  se numește *termenul general al seriei*, termenii șirului  $(S_n)_{n \geq 1}$  se numesc *sumele parțiale ale seriei*, iar seria  $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$  se numește *restul de rang  $n$  al seriei* considerate.

*Serii convergente, divergente, oscilante.* Seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  se numește *convergentă* dacă șirul sumelor ei parțiale  $(S_n)_{n \geq 1}$  este convergent. Limita  $S$  a șirului  $(S_n)_{n \geq 1}$  se numește *suma seriei* și se notează  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

*Exemple.* 1) Seria geometrică  $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots$  este convergentă dacă  $-1 < q < 1$  și are suma  $S = \frac{a_1}{1-q}$ .

2) Seria armonică alternată  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$  este convergentă și are suma  $S = \ln 2$ .

3) Seria  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$  este convergentă și are suma  $S = e$ .

Seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  se numește *divergentă* dacă șirul sumelor ei parțiale este divergent.

*Exemple.* 1) Seria  $1 + 1 + 1 + \dots$  este o serie divergentă și are suma  $+\infty$ .

2) Seria armonică  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  este divergentă și are suma  $+\infty$ .

3) Seria armonică generalizată  $1 + \frac{1}{2^\sigma} + \dots + \frac{1}{n^\sigma} + \dots$  este divergentă pentru  $\sigma \leq 1$  (avind suma  $+\infty$ ) și convergentă pentru  $\sigma > 1$ .

Seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  se numește *oscilantă* dacă șirul sumelor ei parțiale nu are limită.

*Exemplu.* Seria  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  este o serie oscilantă.

*Teoremă.* Dacă  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este o serie convergentă de numere, atunci șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge către zero.

*Corolar.* Dacă  $(a_n)_{n \geq 1}$  nu tinde către zero, atunci seria  $\sum_{n \geq 1} a_n$  este divergentă.

### 5.4.1. Alte serii remarcabile

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right), \quad k \in \mathbb{N}^*, \text{ fixat}$$

$$2) \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n!} = 15 \text{ e.}$$

$$3) \sum_{n \geq 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$4) \sum_{n \geq 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$5) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Leibniz}).$$

$$6) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Euler}).$$

$$7) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$8) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$9) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$10) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{Euler}).$$

$$11) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

$$12) 1 - \ln \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots =$$

$$= 0,577215\dots \quad (\text{constanta lui Euler}).$$

13) Fie  $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$  mulțimea tuturor numerelor prime, ordonată crescător. Atunci seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n} \text{ este divergentă (Euler).}$$

14) Fie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  o serie numerică cu termeni pozitivi convergentă și  $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$  restul seriei. Atunci seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$$
 este convergentă, iar seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{r_n}$$
 este divergentă (O. D. Kellog).

15) Mulțimea tuturor sumelor parțiale neordonate ale seriei armonice  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  coincide cu mulțimea numerelor raționale pozitive (*problema fracțiilor egiptene*)

16) Dacă în seria armonică  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  se elimină termenii ai căror numitori conțin cifra 9, atunci seria nouă obținută este convergentă și are suma mai mică decît 25 sau egală cu 25 (A. J. Kempner).

17) Fie  $m \in \mathbf{N}$ ,  $m \geq 2$ . Atunci seria

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \\ + \frac{x}{2m} + \frac{1}{2m+1} + \dots + \frac{1}{3m-1} + \frac{x}{3m} + \dots$$

este convergentă numai pentru  $x = -m + 1$ . (K. Knopp).

## 5.5. Noțiunea de funcție

### 5.5.1. Generalități

*Definiție.* Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi și  $G$  o parte a produsului cartezian  $E \times F$  astfel încît  $\forall x \in E, \exists ! y \in F$ , cu proprietatea  $(x, y) \in G$ . Numim funcție (aplicație, transformare) definită pe  $E$  cu valori în  $F$  tripletul  $f = (E, F, G)$ .

$E$  se numește domeniul de definiție,  $F$  codomeniul funcției, iar  $G$  graficul lui  $f$ .

În locul notației  $f = (E, F, G)$  se preferă:

$$f: E \rightarrow F; \quad E \xrightarrow{f} F; \quad x \rightarrow f(x); \quad y = f(x);$$

$x$  se numește variabilă independentă sau argument, iar  $y$  variabilă dependentă. Elementul unic  $y \in F$ , care corespunde lui  $x \in E$ , se numește și imaginea lui  $x$  prin  $f$  sau valoarea funcției  $f$  în  $x$ .

*Exemple.* 1)  $f(x) = \sqrt{x}$ , pentru care  $E = [0, 4]$  și  $F = [0, 2]$ ;

2)  $f(x) = \sin x$ , cu  $E = \mathbf{R}$  și  $F = [-1, 1]$ ;

3)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$   $E = \mathbf{R}$ ,  $F = \{0, 1\}$  (funcția lui Dirichlet)

*Observație.* Dacă  $E, F \subset \mathbb{K}$ , atunci  $f: E \rightarrow F$  se numește *funcție reală de argument real sau funcție numerică*.

Dacă  $E$  nu se precizează, atunci prin domeniul de definiție a funcției se subînțelege mulțimea tuturor punctelor  $x$  din  $\mathbb{R}$  pentru care  $f(x)$  are sens.

*Restricția unei funcții. Extensia unei funcții.* Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție și  $A \subset E$  o parte a lui  $E$ . Se numește *restricția lui  $f$  la  $A$*  și se notează  $f_A$ , funcția  $f_A: A \rightarrow F$  definită astfel,  $\forall x \in A, f_A(x) = f(x)$ .

Funcția  $f: E \rightarrow F$  se numește o *extensie* sau o *prelungire* a lui  $f_A: A \subset E \rightarrow F$  de la  $A$  la  $E$ .

*Exemplu.* Funcția  $g(x) = \cos x, g: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  este o restricție a lui  $f(x) = \cos x, f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  și  $f$  o extensie a lui  $g$ .

*Funcții egale.* Două funcții  $f: E \rightarrow F$  și  $g: E_1 \rightarrow F_1$  se numesc *egale* dacă  $E = E_1, F = F_1$  și,  $\forall x, x \in E, f(x) = g(x)$ .

*Exemple.* Funcțiile  $f: \{1\} \rightarrow \{1\}, f(x) = x$  și  $g: \{1\} \rightarrow \{1\}, g(x) = 2x^2 - 1$  sînt două funcții egale.

*Funcția numerică nulă pe  $E$ .* Se numește *funcție (numerică) nulă pe  $E$*  ( $\subset \mathbb{R}$ ) funcția  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin,  $\forall x \in E, f(x) = 0$ . Se notează  $f = 0$  sau  $f \equiv 0$ .

*Funcția constantă (pe  $E$ ).* Fie  $f: E \rightarrow F$  o funcție. Spunem că  $f$  este funcția constantă pe  $E$  și scriem  $f = c$ , dacă  $\exists c \in F$ , astfel încît  $\forall x \in E, x$  avem  $f(x) = c$ .

*Funcția caracteristică a unei mulțimi.* Fie  $A \subset E$  o mulțime. Se numește *funcție caracteristică a mulțimii  $A$*  funcția  $\varphi_A: E \rightarrow \{0, 1\}$ , definită astfel

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \in A \setminus E \end{cases}$$

$$\text{Funcția lui Dirichlet: } f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{cînd } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{cînd } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

*Funcția lui Riemann:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{cînd } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q \geq 1 \\ 0, & \text{cînd } x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \{0\}). \end{cases}$$

*Funcția liniară.* Fie o funcție  $f: E \rightarrow F$  cu  $E$  și  $F$  spații vectoriale peste  $K$ . Funcția  $f$  se numește *liniară* dacă

$$1) \forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (\text{aditivitate})$$

$$2) \forall x \in E, \forall \lambda \in K, f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (\text{omogeneitate})$$

*Exemplu:*  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f(x) = 2x$  este o funcție liniară.

*Funcția identică (sau identitate) a unei mulțimi.* Fie  $E$  o mulțime oarecare. Se numește *funcție identică a mulțimii  $E$*  și se notează  $1_E$ , funcția  $1_E: E \rightarrow E$  definită astfel,  $\forall x \in E, 1_E(x) = x$ .

*Exemplu.* Fie  $E = [0, 2]; 1_E(x) = x, x \in [0, 2]$ .

*Observație.* Numărul funcțiilor definite pe o mulțime  $E$  finită cu  $m$  elemente, cu valori în mulțimea finită  $F$  cu  $n$  elemente este egal cu  $n^m$ .

**Funcție multiplicativă.** Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție cu  $E \subset \mathbf{R}$ . Funcția  $f$  se numește *multiplicativă*, dacă  $\forall x, y \in E$  avem  $xy \in E$  și  $f(xy) = f(x)f(y)$ .

Exemple de funcții multiplicative sînt: funcția *signum* și funcția lui Euler (indicatorul lui Euler).

**Funcții numerice pare și impare.** Mulțimea  $A \subset \mathbf{R}$  se numește *simetrică* în raport cu originea  $O^1$ ), dacă  $\forall x \in A$  avem  $-x \in A$ , adică  $A = -A$ .

**Definiție.** Fie  $f: E \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $E$  simetrică față de origine. Funcția  $f$  se numește *pară* dacă  $\forall x \in E$  avem  $f(-x) = f(x)$ . Funcția  $f$  se numește *impară* dacă  $\forall x \in E$  avem  $f(-x) = -f(x)$ .

Exemple. Funcția *cos* este pară pe  $\mathbf{R}$ , iar *sin*, *signum* impare pe domeniile lor de definiție.

**Funcții numerice periodice.** Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o submulțime a lui  $\mathbf{R}$  și  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție. Spunem că funcția  $f$  este *periodică* dacă există  $T > 0$  astfel încît  $\forall x \in E$  să avem  $x + T \in E$  și  $f(x + T) = f(x)$ . Numărul  $T$  se numește o *perioadă* a lui  $f$ .

Cel mai mic număr pozitiv  $T$  avînd proprietatea de mai sus se numește *perioada minimă* a lui  $f$ .

Exemple. 1) Funcțiile *sin* și *cos* sînt periodice cu perioada  $T = 2\pi$ .

2) Funcțiile *tg* și *cotg* sînt periodice cu perioada  $T = \pi$ .

3) Funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin x^2$ , nu este periodică.

**Funcții injective.** O funcție  $f: E \rightarrow F$  se numește *injectivă* dacă,  $\forall x, y \in E$  și  $x \neq y$ , avem  $f(x) \neq f(y)$ .

P 1. O funcție  $f: E \rightarrow F$  este *injectivă* dacă,  $\forall x, y \in E$ , egalitatea  $f(x) = f(y)$  implică  $x = y$ .

P 2. O funcție  $f: E \rightarrow F$  nu este *injectivă*, dacă există cel puțin două elemente  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$ , astfel încît să avem  $f(x) = f(y)$ .

P 3. O funcție numerică  $f: E \rightarrow F$  ( $E, F \subset \mathbf{R}$ ) este *injectivă* dacă orice paralelă la  $Ox$  dusă prin puncte ale lui  $F$  intersectează graficul ei în cel mult un punct.

Exemple: 1)  $f: [0, 2] \rightarrow [0, 4]$ ,  $f(x) = x^2$  este injectivă.

2)  $g: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $g(x) = x^2$  nu este injectivă.

**Funcții surjective.** O funcție  $f: E \rightarrow F$  se numește *surjectivă* dacă  $F = f(E)$  adică *dacă imaginea lui  $E$  prin  $f$  este  $F$ .*

P 1. O funcție  $f: E \rightarrow F$  este *surjectivă* dacă oricare ar fi  $b \in F$ , ecuația  $f(x) = b$  are cel puțin o rădăcină  $x \in E$ .

P 2. O funcție  $f: E \rightarrow F$  nu este *surjectivă* dacă  $\exists y \in F$  astfel încît  $\forall x \in E$  avem  $y \neq f(x)$ .

Exemple. 1)  $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$  este surjectivă.

2)  $g: [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \cup \{2\}$ ,  $g(x) = x^2$  nu este surjectivă.

P 3. O funcție numerică  $f: E \rightarrow F$  ( $E, F \subset \mathbf{R}$ ) este *surjectivă* dacă orice paralelă la  $Ox$  dusă prin puncte ale lui  $F$  intersectează graficul lui  $f$  în cel puțin un punct.

<sup>1)</sup> Analog se introduc noțiunile de *mulțime simetrică față de un punct  $x_0$*  și de funcție *pară* în raport cu  $x_0$ , respectiv *impară*.



*Funcții bijective.* O funcție se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

Exemple: 1)  $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  este bijectivă.

2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$  este bijectivă.

*Compunerea funcțiilor.* Fie  $g: F \rightarrow H$  și  $f: E \rightarrow F$ .

Se numește *compusa* lui  $g$  cu  $f$  funcția  $h(x) = g(f(x)), \forall x \in E$ . Se notează  $h = g \circ f$ .

Exemple. 1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2; g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x$ ; avem

$$(f \circ g)(x) = 2^{2x}; (g \circ f)(x) = 2x^2; (f \circ f)(x) = x^4, (g \circ g)(x) = 2^{2x}.$$

*Propoziție.* Fie  $h: G \rightarrow H, g: F \rightarrow G$  și  $f: E \rightarrow F$  trei funcții. Atunci  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

*Funcții inversabile.* Funcția  $f: E \rightarrow F$  se numește *inversabilă* dacă  $\exists g: F \rightarrow E$  astfel încât

$$f \circ g = 1_F \text{ și } g \circ f = 1_E.$$

Dacă există un astfel de  $g$ , atunci el este *unic*, se notează  $g = f^{-1}$  și se numește *funcția inversă* a lui  $f$  sau *funcția reciprocă* a lui  $f$ .

*Teoreme:* 1. O funcție este inversabilă  $\Leftrightarrow$  este bijectivă.

2. Dacă o funcție numerică inversabilă  $f$  este strict crescătoare (descrescătoare), atunci și  $f^{-1}$  este strict crescătoare (descrescătoare).

3. Graficele funcțiilor  $f$  și  $f^{-1}$  sînt *simetrice* față de prima bisectoare.

Exemplu. Dacă  $f: [-2, 5] \rightarrow [-13, 8]$  și  $f(x) = 3x - 7$ , atunci  $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$  și  $f^{-1}: [-13, 8] \rightarrow [-2, 5]$ .

*Funcții numerice monotone.* Funcția  $f: E \rightarrow F, E, F \subset \mathbb{R}$ , este *crescătoare* (respectiv *strict crescătoare*) pe  $A \subset E$ , dacă și numai dacă,  $\forall x, y \in A$ , avem:  $x \leq y$  implică  $f(x) \leq f(y)$  (respectiv  $x < y$  implică  $f(x) < f(y)$ )

Funcția  $f: E \rightarrow F, E, F \subset \mathbb{R}$ , este *descrescătoare* (respectiv *strict descrescătoare*) pe  $A \subset E$  dacă și numai dacă  $\forall x, y \in A$ , avem:  $x \leq y$  implică  $f(x) \geq f(y)$  (respectiv  $x < y$  implică  $f(x) > f(y)$ ).

Aceste funcții se numesc *monotone* (respectiv *strict monotone*).

Exemple. 1) Funcția  $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  este strict crescătoare pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

2)  $f: [1, 4] \rightarrow [1, 16], f(x) = x^2$  este strict crescătoare pe  $[1, 4]$ ;

3)  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos x$  este strict descrescătoare pe  $[0, \pi]$ .

4) Funcția  $f(x) = [x], x \in \mathbb{R}$ , este monoton crescătoare.

*Teoreme.* 1. Orice funcție numerică strict monotonă este injectivă.

2. Orice funcție numerică strict monotonă și surjectivă este bijectivă.

*Funcții numerice mărginite.* Fie  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție. Funcția  $f$  este mărginită pe  $A \subset E$ , dacă satisface una din următoarele condiții echivalente între ele:

- 1) Mulțimea  $f(A)$  este mărginită;
- 2)  $\exists m, M \in \mathbf{R}$ , astfel încît  $\forall x \in A$  să avem  $m \leq f(x) \leq M$ .
- 3)  $\exists k > 0$  astfel încît  $\forall x \in A$ , să avem  $|f(x)| \leq k$ .

*Marginea superioară* (respectiv *inferioară*) a mulțimii  $f(A)$  se numește *marginea superioară* (respectiv *inferioară*) a lui  $f$  pe  $A$  și se notează  $\sup_{x \in A} f(x)$  (respectiv  $\inf_{x \in A} f(x)$ ).

Dacă mulțimea  $f(A)$  nu admite majoranți (respectiv minoranți), atunci prin extensiune se pune  $\sup f(x) = +\infty$  (respectiv  $\inf f(x) = -\infty$ ).

Dacă mulțimea  $f(A)$  admite maxim (respectiv minim), adică  $\exists a \in A$  (respectiv  $\exists b \in A$ ) cu proprietatea  $f(a) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in A$  (respectiv  $f(b) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in A$ ), atunci spunem că  $f$  își atinge maximul (respectiv minimul) pe mulțimea  $A$ .

Numărul  $f(a)$  (respectiv  $f(b)$ ) se numește *maximul* (respectiv *minimul*) funcției  $f$  pe  $A$  și se notează  $\max f(x)$  (respectiv  $\min f(x)$ ), punctul  $a$  (respectiv  $b$ ) numindu-se *punct de maxim* (respectiv *punct de minim*) al lui  $f$  pe  $A$ .

Punctul  $a_1 \in E$  (respectiv  $b_1 \in E$ ) se numește *punct de maxim* (respectiv *minim*) local al lui  $f$ , dacă există o vecinătate  $U$  a lui  $a_1$  (respectiv  $V$  a lui  $b_1$ ) cu proprietatea  $f(x) \leq f(a_1)$ ,  $\forall x \in U \cap (E \setminus \{a_1\})$  (respectiv  $f(b_1) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in V \cap (E \setminus \{b_1\})$ ).

Dacă se înlocuiește  $\leq$  cu  $<$  obținem definiția *punctului de maxim* (respectiv de minim) *local strict*.

Valorile maxime și minime ale unei funcții se numesc *extreme* ale acesteia, iar *punctele de maxim și de minim puncte de extrem*.

*Exemple.* 1)  $f : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$   $f(x) = \sin x$  este mărginită și  $\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1$ ,  $\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -1$ .

2)  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^2$  nu este mărginită;  $\min_{x \in [0, +\infty)} f(x) = 0$ ,  $\sup_{x \in [0, +\infty)} f(x) = +\infty$ .

*Funcții convexe.* Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție, unde  $I \subset \mathbf{R}$  este un interval. Funcția  $f$  se numește *convexă* pe  $I$  dacă,  $\forall x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 \neq x_2$ ,  $\forall \lambda \in (0, 1)$ , avem

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \quad (1)$$

Dacă în (1) înlocuim semnul  $\leq$  prin  $<$ , atunci  $f$  se numește *strict convexă*, iar dacă același semn îl înlocuim cu  $\geq$  atunci  $f$  se numește *concavă*.

*Teoremă.* Fie  $I \subset \mathbf{R}$  un interval și  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție convexă. Atunci  $f$  este continuă în  $\overset{\circ}{I}$ .

*Teoremă:* Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție convexă. Atunci  $f$  admite derivate laterale în fiecare punct din  $\overset{\circ}{I}$ .

*Teoremă.* Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de două ori derivabilă. Atunci  $f$  este *convexă* pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă  $\forall x \in (a, b)$  avem  $f''(x) \geq 0$ .

Exemple. 1)  $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = e^x$  este convexă.

2)  $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^2$  este convexă.

3)  $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = x^3$  nu este convexă.

**Inegalitatea lui Jensen.** Dacă  $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție convexă,  $x_k \in I$ ,

$p_k \geq 0$ ,  $\bar{k} = \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{k=1}^n p_k > 0$ , atunci avem

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k}{\sum_{k=1}^n p_k}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

**Funcții cu punct fix.** Fie  $E$  o mulțime. Funcția  $f: E \rightarrow E$  spunem că admitem **punctul fix**  $x_0 \in E$  dacă  $f(x_0) = x_0$ .

Dacă  $E \subset \mathbf{R}$ , atunci  $f: E \rightarrow E$  are cel puțin un punct fix  $\Leftrightarrow$  graficul lui  $f$  intersectează prima bisectoare cel puțin într-un punct.

Exemple: 1) Funcțiile  $\sin$  și  $\cos$  au fiecare câte un singur punct fix.

2) Funcțiile  $\operatorname{tg}$  și  $\operatorname{ctg}$  au fiecare câte o infinitate de puncte fixe.

**Funcții lip. hitziene.** O funcție  $f: E \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  se numește **lipschitziană** dacă există  $L > 0$  cu proprietatea

$$\forall x, y \in E, \text{ avem } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Exemple. 1) Funcțiile  $\sin$ ,  $\cos: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$  sînt lipschitziene cu  $L = 1$ .

2) Funcția  $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$  nu este lipschitziană.

**Observație.** Funcțiile lipschitziene joacă un rol însemnat în teoria ecuațiilor diferențiale.

**Funcții cu proprietatea lui Darboux (PD).** Fie  $I \subset \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție. Spunem că  $f$  are **proprietatea lui Darboux** dacă  $\forall x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ , și  $\forall y$  cuprins între  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$  există  $x \in (x_1, x_2)$  astfel încît  $y = f(x)$ .

Exemple. 1) Funcțiile continue au proprietatea lui Darboux.

2) Derivata oricărei funcții derivabile are PD.

3) Funcția  $f: (-2, 2) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq 0 \\ x + 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$

nu are PD fiindcă luînd  $x_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_2 = 1$  și  $y = \frac{1}{2} \in (f(x_1), f(x_2)) = (0, 2)$ ,

nu există  $x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$  astfel încît  $\frac{1}{2}$  să fie imaginea unui asemenea punct  $x$  (fig. 5.1)

**Teoremă.** Funcția  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $I$  interval al axei reale, are PD  $\Leftrightarrow \forall J \subset I$ , imaginea lui  $J$  prin  $f$  este un interval.

**Operații algebrice cu funcții numerice.** Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  și  $g: F \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $E, F \subset \mathbf{R}$ ,  $E \cap F \neq \emptyset$ , două funcții numerice.

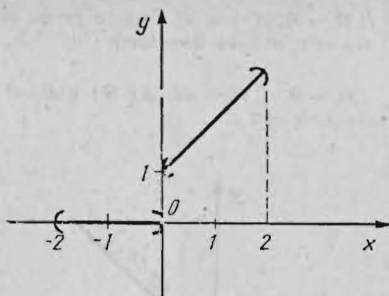


Fig. 5.1

1. Suma  $f + g$  este funcția definită astfel:

$$\forall x \in E \cap F, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. Diferența  $f - g$  este funcția definită astfel:

$$\forall x \in E \cap F, (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

3. Produsul  $fg$  este funcția definită astfel:

$$\forall x \in E \cap F, (fg)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

4. Cîțul  $\frac{f}{g}$  este funcția definită astfel:

$$\forall x \in E \cap F \text{ și } g(x) \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

5. Funcția  $af$ , cu  $a \in \mathbf{R}$ , este definită astfel:

$$\forall x \in E, (af)(x) = af(x).$$

*Teoremă.* Mulțimea  $C$  a funcțiilor continue  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  constituie un spațiu vectorial peste  $\mathbf{R}$  față de operațiile naturale de adunare a funcțiilor ( $\forall f, g \in C, f, x \in [a, b], (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ) și de înmulțire a acestora cu scalari ( $\forall x \in [a, b], \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall f \in C, \text{avem } (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ).

### 5.5.2. Funcții elementare

1. Funcția constantă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \{b\}$ ,  $b \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = b$  sau  $y = b$ ;  $G_f$  (graficul lui  $f$ ) este o dreaptă paralelă la  $Ox$  (fig. 5.2).

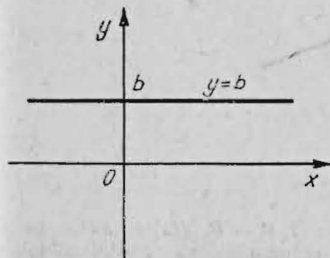


Fig. 5.2

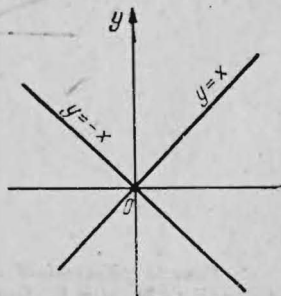


Fig. 5.3

2. Funcția identică  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x$ ;  $G_f$  este prima bisectoare (fig. 5.3);  
 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x$ ;  $G_f$  este a doua bisectoare (fig. 5.3).

3. Funcția liniară  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax, a \in \mathbf{R}$ ; graficul  $G$  este o dreaptă (fig. 5.4) care trece prin originea  $O$ .

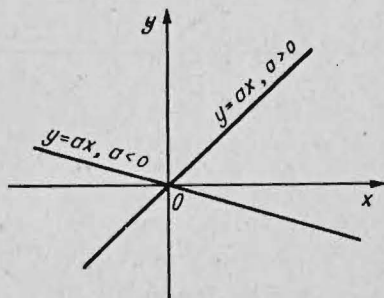


Fig. 5.4

4. Funcția afină  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ ;  $G_f$  este o dreaptă (fig. 5.5). Semnul lui  $f(x)$ :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	Semn contrar lui $a$		Semnul lui $a$

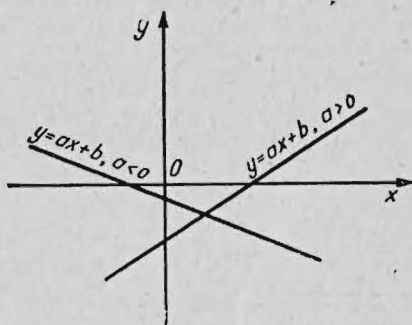
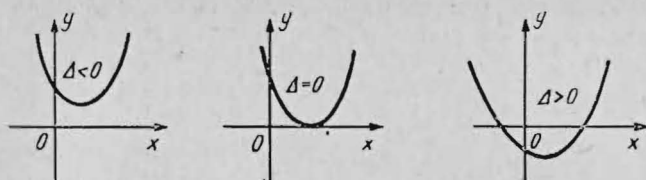
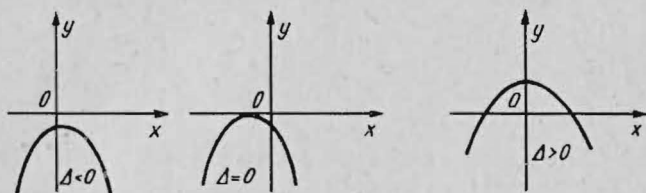


Fig. 5.5

5. Funcția polinomială de gradul al doilea  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$ . Graficele funcțiilor polinomiale de gradul al doilea sînt parabole (fig. 5.6).



$$y = ax^2 + bx + c, a > 0$$



$$y = -ax^2 + bx + c, a < 0$$

Fig. 5.6

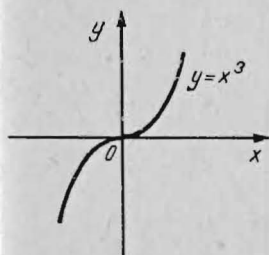


Fig. 5.7

7. Funcția polinomială de gradul al treilea  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3$ ;  $G_f$  este o parabolă de gradul al treilea (fig. 5.7).

8. Funcțiile raționale  $f: \mathbf{R} \setminus \{x \mid Q(x) = 0\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P, Q \in \mathbf{R}[X]$ .

9. Funcția radical  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+, f(x) = \sqrt[n]{x}$  sau  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$  cu  $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ .

10. Funcția putere  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), f(x) = x^a, a \in \mathbf{R}$ .

11. Funcția exponențială  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+, f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1, a \in \mathbf{R}$  (fig. 5.8 și fig. 5.9). Funcția exponențială este bijectivă.

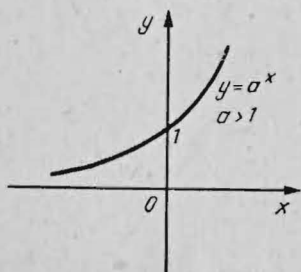


Fig. 5.8

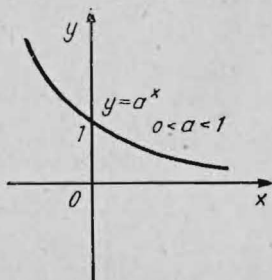


Fig. 5.9

Inversa ei este funcția logaritmică.

12. Funcția logaritmică  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  (fig. 5.10 și fig. 5.11). Este bijectivă și inversa ei este funcția exponențială.

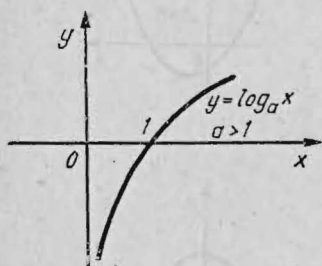


Fig. 5.10

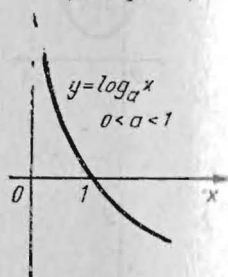


Fig. 5.11

13. Funcția sin și funcția arc sin. Fie funcția  $\sin: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ . Restricția acesteia la  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  este bijectivă și admite deci o funcție inversă, anume arcsin:  $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (fig. 5.12); avem  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ ;  $\sin(\arcsin x) = x$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ ;  $\arcsin(\sin x) = x$ ,  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

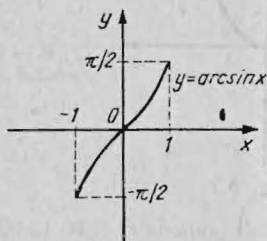
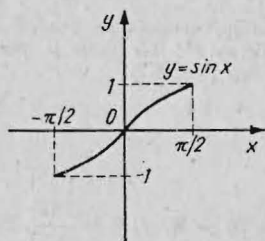


Fig. 5.12

14. Funcția cos și funcția arccos. Fie funcția  $\cos: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ . Restricția acesteia la intervalul  $[0, \pi]$  este bijectivă și admite deci o funcție inversă, anume arccos:  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  (fig. 5.13); avem  $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ ,

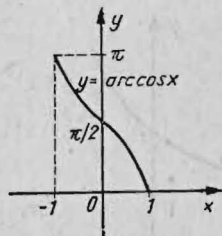
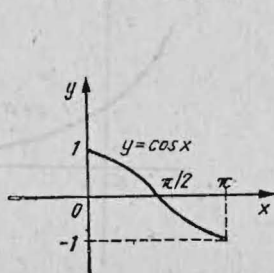


Fig. 5.13

$\forall x \in [-1, 1]; \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]; \cos(\arccos x) = x,$   
 $\forall x \in [-1, 1]; \arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0, \pi].$

15. *Funcția tg și funcția arctg.* Fie funcția  $\text{tg}: \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi\right) \rightarrow \mathbf{R}$ . Restricția acesteia la intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  este strict crescătoare și surjectivă și admite deci o funcție inversă, anume  $\text{arctg}: \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (figura 5.14); avem  $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg} x, \forall x \in \mathbf{R}; \text{tg}(\text{arctg} x) = x, \forall x \in \mathbf{R};$   
 $\text{arctg}(\text{tg} x) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

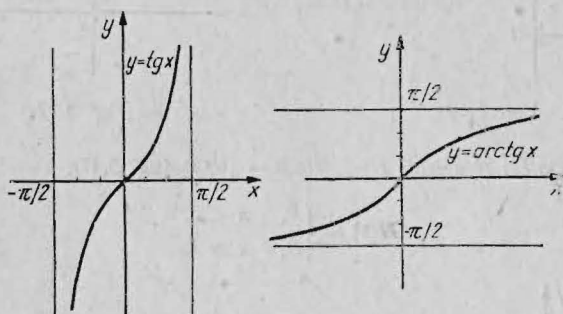


Fig. 5.14

16. *Funcția cotg și funcția arccotg.* Fie funcția  $\text{ctg}: \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi \rightarrow \mathbf{R}$ . Restricția acesteia la intervalul  $(0, \pi)$  este strict descrescătoare și surjectivă și admite deci o funcție inversă anume,  $\text{arccotg}: \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi)$  (fig. 5.45); avem  $\text{arccotg}(-x) = \pi - \text{arccotg} x, \forall x \in \mathbf{R}; \text{ctg}(\text{arccotg} x) = x, \forall x \in \mathbf{R};$   
 $\text{arccotg}(\text{ctg} x) = x, \forall x \in (0, \pi); \text{arctg} x + \text{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbf{R}.$

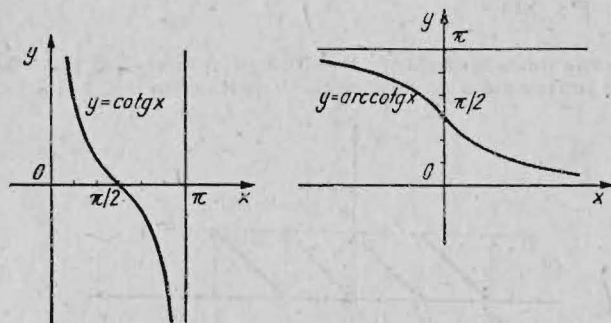


Fig. 5.15



17. Funcția *signum*:  $\text{sign}: \mathbf{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  (fig. 5.16), cu

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

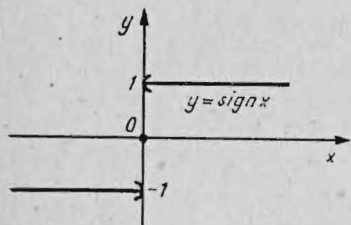


Fig. 5.16

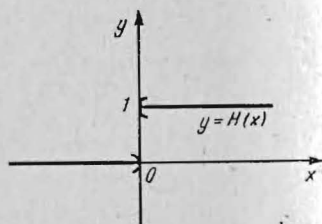


Fig. 5.17.

18. Funcția lui Heaviside  $H(x)$ ,  $H: \mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}$  (fig. 5.17),

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

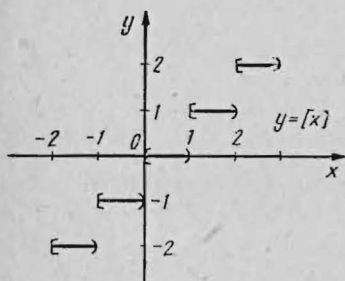


Fig. 5.18

19. Funcția parte întreagă  $[\cdot]: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$  (fig. 5.18),

$$[x] = \begin{cases} -n, & -n \leq x < -n + 1, \quad n \in \mathbf{N} \\ n, & n \leq x < n + 1, \quad n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

O proprietate reversibilă a acestei funcții:  $\forall x \in \mathbf{R}$ , avem  $[x] \leq x < [x] + 1$ , respectiv  $x - 1 < [x] \leq x$ .

20. Funcția parte zecimală  $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1)$ ,  $f(x) = x - [x]$  (fig. 5.19). O proprietate interesantă a acestei funcții:  $\forall x \in \mathbf{R}$ , avem  $0 \leq x - [x] < 1$ .

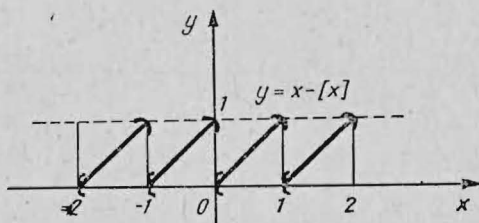


Fig. 5.19

21. Funcția „distanța de la  $x$  la cel mai apropiat întreg”:

$$\{\cdot\} : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1] \text{ (fig. 5.20), respectiv } \{x\} = \begin{cases} x - n, & \text{cînd } x \in \left[ n, n + \frac{1}{2} \right] \\ -x + n + 1, & \text{cînd } x \in \left[ n + \frac{1}{2}, n + 1 \right] \end{cases}$$

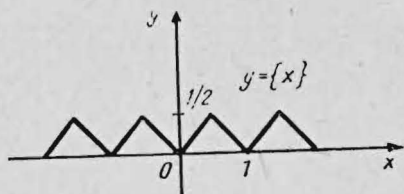


Fig. 5.20

22. Funcția modul  $|\cdot| : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, |x| = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$  (fig. 5.21)

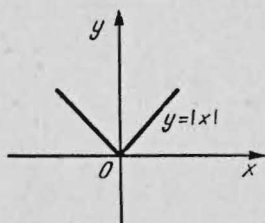


Fig. 5.21

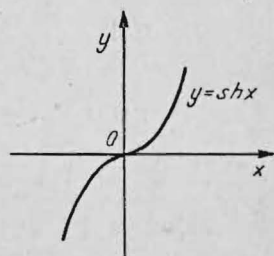


Fig. 5.22

23. Funcția sinus hiperbolic:  $sh : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  (fig. 5.22),  $sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .  
Funcția este bijectivă și impară.

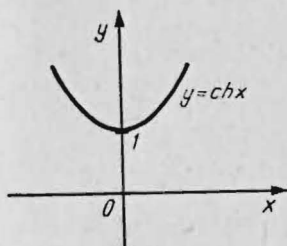


Fig. 5.23

24. Funcția cosinus hiperbolic:  $ch : \mathbf{R} \rightarrow [1, +\infty)$ ,  $ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  (fig. 5.23).  
Funcția este surjectivă și pară.

25. Funcția  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ ,  $f: \mathbf{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (fig. 5.24).

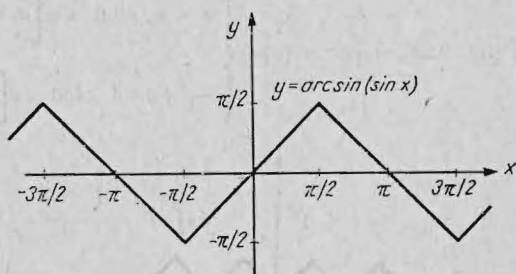


Fig. 5.24

26. Funcția  $f(x) = \arccos(\cos x)$ ,  $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, \pi]$  (fig. 5.25).

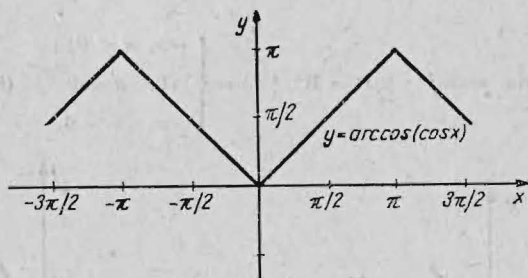


Fig. 5.25

## 5.6. Limite de funcții

### 5.6.1. Definiții

1. *Limita unei funcții într-un punct.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime,  $x_0 \in E'$  un punct,  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $l \in \mathbf{R}$  un punct. Spunem că  $l$  este *limita funcției*  $f$  în  $x_0$ , dacă  $\forall (x_n)_{n \geq 1}$  un șir de puncte din  $E \setminus \{x_0\}$ , cu limita  $x_0$ , șirul valorilor lui  $f$ ,  $(f(x_n))_{n \geq 1}$ , are limita  $l$ . Scriem atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

*Exemplu.* Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ ,  $f(x) = 2^x$  și  $x_0 = 1$ . Atunci  $\lim_{x \rightarrow 1} 2^x = 2$ .

*Observație.* Funcția  $f$  nu are limită în  $x_0$ , dacă există șiruri de puncte din  $E \setminus \{x_0\}$ , care au limita  $x_0$ , dar pentru care șirurile valorilor funcției au limite diferite între ele.

2. *Limita laterală la stînga.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime,  $x_0 \in E'^s$  un punct,  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $l_s \in \mathbf{R}$  un punct. Spunem că  $l_s$  este *limita funcției*  $f$  la stînga în  $x_0$ , dacă  $\forall (x_n)_{n \geq 1}$  un șir de puncte din  $E$ ,  $x_n < x_0$ , cu limita  $x_0$ , șirul valorilor lui  $f$ ,  $(f(x_n))_{n \geq 1}$ , are limita  $l_s$ . Scriem atunci  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s =$

$$= f(x_0 - 0).$$

$$\text{Exemplu. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( 1 + \frac{|x|}{x} \right) = 0.$$

3. *Limita laterală la dreapta.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime,  $x_0 \in E'$  un punct,  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $l_0 \in \overline{\mathbf{R}}$  un punct. Spunem că  $l_0$  este *limita funcției  $f$  la dreapta* în  $x_0$ , dacă  $\forall (x_n)_{n \geq 1}$  un șir de puncte din  $E$ ,  $x_n > x_0$ , cu limita  $x_0$ , și șirul valorilor lui  $f$ ,  $(f(x_n))_{n \geq 1}$ , are limita  $l_0$ . Scriem atunci  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_0 = f(x_0 + 0)$ .

$$\text{Exemplu. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( 1 + \frac{|x|}{x} \right) = 2.$$

### 5.6.2. Proprietăți

*Propoziție.* Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $x_0 \in E'$  un punct (de acumulare al lui  $E$ ). Atunci numărul  $l \in \overline{\mathbf{R}}$  este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $l$  există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \neq x_0$  din  $U \cap E$ , să avem  $f(x) \in V$ .

*Exemplu.* Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ . Fie  $V_\infty = (\varepsilon, +\infty)$  o vecinătate a lui  $+\infty$ . Din  $\frac{1}{(x-2)^2} > \varepsilon$  sau  $|x-2| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  sau  $x \in \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = U$ , vecinătate a lui 2, deducem  $\frac{1}{(x-2)^2} \in V$ , vecinătate a lui  $+\infty$ , și deci  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ .

*Propoziție.* Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $x_0 \in E'$  un punct (de acumulare al lui  $E$ ). Atunci numărul  $l \in \mathbf{R}$  este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ , astfel încât  $|f(x) - l| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in E \setminus \{x_0\}$ , cu proprietatea  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$ .

*Exemplu.* Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 1$  și  $x_0 = 1$ . Pentru a arăta că  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$ , fie  $\varepsilon > 0$  dat. Să arătăm că lui  $\varepsilon$  îi corespunde  $\delta$ , astfel încât  $|x - 1| < \delta$  să implice  $|x^2 + 1 - 2| < \varepsilon$ .

În adevăr, din  $|x^2 + 1 - 2| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1| < \varepsilon$ , sau  $|x - 1|(|x - 1| + 2) < \varepsilon$ , sau  $2|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$  și  $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$ , deducem

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}.$$

Deci  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$ .

*Limita modulului.* Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ . Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ .

*Criteriul majorării.* Fie  $f, g: E \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții și  $x_0 \in E'$ .

1. Dacă  $|f(x) - l| \leq |g(x)|, \forall x \in E$ , și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

*Exemplu.* Fie  $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . În adevăr

din  $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , și  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , pe baza criteriului majorării,

deducem că  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ .

2. Dacă  $f(x) \geq g(x), \forall x \in E$  și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

*Exemplu.* Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x^2 + x + 5$ . Se cere  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Observăm că  $\forall x > 0$ , avem  $f(x) = 2x^2 + x + 5 > x^2 = g(x), g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Dar cum  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , rezultă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

3. Dacă  $f(x) \leq g(x), \forall x \in E$  și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

*Exemplu.* Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + x + 1$ . Se cere  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Observăm că  $f(x) < x^3 = g(x), g: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbf{R}$ . Dar cum  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ , rezultă și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

*Trecerea la limită în inegalități.* Fie  $f, g: E \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții și  $x_0 \in E'$  un punct (de acumulare al lui  $E$ ).

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  există (în  $\overline{\mathbf{R}}$ ) și dacă  $f(x) \leq g(x)$ , pentru orice  $x \in E \setminus \{x_0\}$  atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

*Exemplu.* Fie  $g(x) = x^2, g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  și  $f$  funcția nulă. Avem  $\forall x > 0, x^2 > 0$ . Dar  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

Acest exemplu ne arată că dintr-o inegalitate strictă  $g(x) > f(x), \forall x \neq x_0, x \in \mathbf{R}$ , nu putem deduce pentru limite decît o inegalitate nestrictă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

*Operații cu funcții care au limită.* Fie  $f, g: E \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții și  $x_0 \in E'$  un punct (de acumulare al lui  $E$ ).

1. Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au în punctul  $x_0$  limitele  $l_1$  și  $l_2$  din  $\overline{\mathbf{R}}$  și dacă  $l_1 + l_2$  are sens, atunci funcția  $f + g$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

2. Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au în punctul  $x_0$  limite  $l_1$  și  $l_2$  în  $\overline{\mathbf{R}}$  și dacă  $l_1 \cdot l_2$  are sens, atunci funcția  $fg$  are limită în  $x_0$  și avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)).$$

3. Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au în punctul  $x_0$  limitele  $l_1$  și  $l_2$  în  $\overline{\mathbf{R}}$  și dacă raportul  $\frac{l_1}{l_2}$  are sens, atunci funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

*Limite de puteri.* Fie  $f, g: E \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții,  $x_0 \in E'$  (un punct de acumulare al lui  $E$ ) și  $f$  cu valori strict pozitive. Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  și dacă  $a^b$  are sens, atunci funcția  $(f(x))^{g(x)}$  are limită în  $x_0$  și avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

*Limite de funcții compuse.* Fie  $f: F \rightarrow \mathbf{R}$  și  $u: E \rightarrow F$  două funcții,  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ ,  $u_0$  un punct de acumulare al lui  $F$  și  $h = f \circ u$ .

Dacă i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ ; ii)  $u(x) \neq u_0, \forall x \in E \setminus \{x_0\}$ ; iii)  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l.$$

*Cazurile exceptate la operațiile cu limite de funcții:*

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

### 5.6.3. Limite fundamentale de funcții

1. *Polinoame.* Fie  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  și  $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$  două polinoame cu coeficienți reali. Atunci avem

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbf{R};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x) = a_0 (\pm \infty)^n;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}, Q(x_0) \neq 0;$$

2. *Funcții raționale:*

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^m + \dots + a_m} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } n = m \\ \frac{a_0}{b_0} (\pm \infty)^{n-m}, & \text{dacă } n > m. \end{cases}$$

3. *Funcția radical:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \in \mathbf{R}_+, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_0}}, \quad x_0 \in \mathbf{R}_+^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{x}} = 0.$$

Exemplu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

4. Funcția exponențială:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad x_0 \in \mathbf{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \text{dacă } a > 1, \quad a \in \mathbf{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \text{dacă } 0 < a < 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad e = 2,71828 \ 18284 \dots$$

5. Funcția logaritmică:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0, \quad x_0 > 0, \quad \text{finit}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty, \quad \log_a x = +\infty, \quad \text{dacă } a > 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x = -\infty, \quad \text{dacă } 0 < a < 1, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

6. Funcții trigonometrice:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \notin \pi/2 + \mathbf{Z}\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} x_0, \quad x_0 \notin \mathbf{Z}\pi$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \operatorname{tg} x = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x > \pi/2}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \operatorname{cotg} x = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{cotg} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad -1 \leq x_0 \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad -1 \leq x_0 \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{-\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$

### 7. Alte limite fundamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \forall a \in \mathbf{R}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in \mathbf{R}, a > 0; \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = a^b \ln a, \quad a \in \mathbf{R}, a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \begin{cases} 0, & \text{cind } 0 < a < 1, a \in \mathbf{R} \\ +\infty, & \text{cind } a > 1, a \in \mathbf{R} \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x \cdot x^n = 0, \quad \forall a \in \mathbf{R}, a \in (0, 1) \text{ și } n \in \mathbf{N}^*$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0, \quad n \geq 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^p x}{x^a} = 0, \quad \forall p \in \mathbf{N}, \forall a \in \mathbf{R}, a > 0.$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{c^x} = 0, \quad P = \text{polinom din } \mathbf{R}[x]$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+x)^z - 1}{x} = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1.$$

## 5.7. Funcții continue

*Definiție.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime,  $x_0 \in E$  un punct și  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție. Funcția  $f$  este *continuuă* în  $x_0$ , dacă oricare ar fi  $(x_n)_{n \geq 1}$  un șir de puncte din  $E$  care are limita  $x_0$ , rezultă că șirul valorilor lui  $f$ ,  $(f(x_n))_{n \geq 1}$ , are limita  $f(x_0)$ .

Punctul  $x_0$  se numește *punct de continuitate*.

*Observație.* Dacă  $f$  nu este continuuă în  $x_0$ , atunci ea se numește *discontinuuă* în  $x_0$ .

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1 \\ 7x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

este discontinuuă în  $x_0 = 1$ .

*Definiție.* Funcția  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *continuuă pe*  $A \subset E$ , dacă  $f$  este continuuă în fiecare punct  $x$  din  $A$ .

*Exemplu.* Funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^2$  este continuuă pe  $\mathbf{R}$ .

*Definiție.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime,  $x_0 \in E \cap E^s$  un punct și  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție. Spunem că funcția  $f$  este *continuuă în  $x_0$  la stînga*, dacă  $f(x_0 - 0)$  există și este egală cu  $f(x_0)$ .

*Definiție.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime,  $x_0 \in E \cap E^d$  un punct și  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție. Spunem că funcția  $f$  este *continuuă în  $x_0$  la dreapta*, dacă  $f(x_0 + 0)$  există și este egală cu  $f(x_0)$ .

*Exemplu.* Funcția  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x-2}$  este continuuă la dreapta în  $x_0 = 2$ .

*Definiție.* Fie  $f: (a, b) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție.

Punctul  $x_0 \in (a, b)$  se numește *punct de discontinuitate de primă speță*, dacă  $f$  este discontinuuă în  $x_0$ , iar  $f(x_0 - 0)$  și  $f(x_0 + 0)$  există și sînt finite.

*Exemplu.* Punctul  $x_0 = 0$  pentru funcția *signum* este un punct de discontinuitate de prima speță.

### 5.7.1. Teoreme

1. Funcția  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  este continuă în  $x_0 \in E$ , dacă și numai dacă pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $f(x_0)$  există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $\forall x \in U \cap E$ , să avem  $f(x) \in V$ .

2. Funcția  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  este continuă în  $x_0 \in E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$  astfel încât  $\forall x \in E$  cu  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$  să avem  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

*Exemplu.* Fie  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 4$ ,  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  și  $x_0 = 0$ . Funcția  $f$  este continuă în 0. În adevăr, fie  $\varepsilon > 0$ , dat. Avem  $|f(x) - 4| = |x^4 + 8x^3| \leq |x|(|x|^3 + 8x^2)$ . Dacă  $|x| < 1$ , atunci  $|x^3| + 8x^2 < 9$  și  $|f(x) - 4| < 9|x| < \varepsilon$  implică  $|x| < \frac{\varepsilon}{9}$ .

Cu  $\delta = \text{minimum} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{9} \right\}$  avem  $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ , adică  $f(x)$  este continuu în 0.

3. O funcție  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  este *continuă* în orice punct izolat al domeniului său de definiție.

4. Fie  $f: E \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $x_0 \in E \cap E^s \cap E^d$  un punct de acumulare la stânga și la dreapta a lui  $E$ . Atunci funcția  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0),$$

respectiv

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0).$$

*Exemplu.* Funcția  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ este continuă în } x_0 = 1$$

fiindcă  $f(1 - 0) = 2 = f(1) = f(1 + 0)$ .

*Observație.* Funcțiile elementare fiind definite pe intervale sau reuniuni de intervale, iar acestea fiind formate numai din puncte de acumulare, rezultă că pentru funcțiile elementare se poate aplica definiția continuității cu ajutorul limitei.

5. (*Continuitatea funcțiilor elementare*). Polinoamele, funcțiile raționale, funcția radical, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice directe și cele inverse sînt continue pe domeniul lor de definiție.

### 5.7.2. Funcții continue pe intervale numerice

1. Teoremă (*Dolzano*). Fie  $I \subset \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Atunci imaginea lui  $I$  prin  $f$ , adică  $f(I)$ , este un interval.

2. Fie  $I \subset \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Atunci  $f$  are proprietatea lui Darboux.

3. Fie  $I \subset \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Dacă în două puncte  $a, b \in I$  funcția ia valori de semne contrare, atunci  $f$  ia valoarea zero cel puțin într-un punct cuprins între  $a$  și  $b$ .

4. Fie  $I \subset \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Dacă  $\forall x \in I, (x) \neq 0$ , atunci  $\forall x \in I$  avem  $f(x) > 0$  sau  $f(x) < 0$ .

5. Fie  $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$  un compact (interval închis și mărginit) și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Atunci  $f$  este mărginită pe  $I$  și își atinge efectiv valorile extreme.

### 5.7.3. Prelungirea funcțiilor prin continuitate

*Definiție.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime și  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă. Funcția  $f$  se zice *prelungibilă prin continuitate* la mulțimea  $F \supset E$ , dacă există  $\hat{f}: F \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă a cărei restricție la  $E$  este  $f$ , adică  $f = \hat{f}|_E$ .

*Teoremă.* Fie  $E \subset \mathbf{R}$  o mulțime,  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și  $a \in \mathbf{R} \setminus E$  un punct.

Atunci: i) Dacă  $a$  nu este un punct de acumulare al lui  $E$ ,  $f$  poate fi prelungită prin continuitate în  $a$ , definind pe  $\hat{f}(a)$  în mod arbitrar.

ii) Dacă  $a$  este un punct de acumulare al lui  $E$ , funcția  $f$  poate fi prelungită prin continuitate în  $a \Leftrightarrow f$  are limită în  $a$ .

În acest caz definim  $\hat{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

*Exemple.* 1) Funcția  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  se poate prelungi în  $x=0$  prin continuitate prin

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

fiindcă există  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

2) Funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , nu se poate prelungi prin continuitate în  $x=0$ , fiindcă nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

### 5.7.4. Operații cu funcții continue

*Teoremă.* Fie  $f, g: E \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții continue în  $x_0 \in E$  (sau pe  $E$ ). Atunci funcțiile  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $af$ , cu  $a \in \mathbf{R}$ ,  $fg$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$ ,  $|f|$ ,  $f^q$ ,  $\frac{f}{g}$  sînt continue în  $x_0$  (sau pe  $E$ ), dacă  $f^q$  și  $\frac{f}{g}$  au sens.

### 5.7.5. Continuitatea funcțiilor compuse

*Teoremă.* Fie  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow \mathbf{R}$ . Dacă funcția  $f$  este continuă în  $x_0 \in E$ , iar funcția  $g$  în  $f(x_0) \in F$ , atunci  $g \circ f$  este continuă în  $x_0 \in E$ .

### 5.7.6. Teorema lui Cauchy

Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și aditivă. Atunci funcția  $f$  este liniară.

## 5.8. Funcții derivabile

*Funcții cu derivată într-un punct.* Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $x_0 \in E \cap E'$  un punct. Funcția  $f$  este cu derivată în  $x_0$ , dacă limita

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ notată cu } f'(x_0),$$

există în  $\overline{\mathbf{R}}$ .

*Funcții derivabile într-un punct.* Funcția  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *derivabilă* în  $x_0 \in E \cap E'$ , dacă derivata  $f'(x_0)$  există și  $f'(x_0) \in \mathbf{R}$ , adică este finită.

O formă echivalentă a lui (1) este

$$(2) \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

*Exemple.* 1) Funcția  $\cos: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$  este derivabilă în  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  și  $f'(x_0) = -1$ .

2) Funcția  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ x^2, & x \in \mathbf{Q} \end{cases}$  este derivabilă doar în origine și  $f'(0) = 0$ .

*Funcții derivabile pe o mulțime.* Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție și  $A \subset E \cap E'$  o mulțime. Funcția  $f$  se numește *derivabilă pe  $A$* , dacă ea este derivabilă în orice punct  $x_0$  din  $A$ . Aplicația  $x \rightarrow f'(x)$  de la  $A$  la  $\mathbf{R}$  se numește *derivata lui  $f$  pe  $A$*  și se notează cu  $f'$ ,  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{d}{dx}(f)$ , sau  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$  dacă  $y = f(x)$ .

*Exemple:* 1) Funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3$  este derivabilă pe  $\mathbf{R}$ .

2) Funcțiile  $\sin, \cos: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$  sînt derivabile pe  $\mathbf{R}$ .

*Funcții cu derivate laterale.* Funcția  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  este cu derivată la stînga (respectiv la dreapta) în  $x_0 \in E \cap E'^s$  (respectiv  $x_0 \in E \cap E'^d$ ), dacă limita

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left( \text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right), \text{ notată } f'_s(x_0) \text{ sau } f'(x_0 - 0)$$

(respectiv  $f'_d(x_0)$  sau  $f'(x_0 + 0)$ ) există în  $\overline{\mathbf{R}}$ .

*Funcții derivabile lateral.* Funcția  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *derivabilă la stînga* (respectiv *la dreapta*) în punctul  $x_0 \in E \cap E'^s$  (respectiv  $x_0 \in E \cap E'^d$ ), dacă  $f'_s(x_0)$  (respectiv  $f'_d(x_0)$ ) există și este finită, adică  $f'_s(x_0) \in \mathbf{R}$  (respectiv  $f'_d(x_0) \in \mathbf{R}$ ).

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , are în origine  $f'_s(0) = -1$  și  $f'_d(0) = 1$ . Funcția  $|x|$  nu este deci derivabilă în  $x_0 = 0$ .

*Interpretarea geometrică a derivatei  $f'(x_0)$ .* Dacă  $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ , este derivabilă pe  $(a, b)$ , atunci  $f'(x_0)$ , cu  $x_0 \in (a, b)$  reprezintă *coeficientul unghiular al tangentei geometrice* la graficul lui  $f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$ , tangentă care are ecuația

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Dacă  $f'(x_0)$  este infinită, atunci tangenta geometrică în  $(x_0, f(x_0))$  la graficul lui  $f$  este paralelă cu axa  $y'Oy$ .

Dacă  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  este continuă în  $x_0 \in E$  și  $f'_s(x_0), f'_d(x_0)$  există, dintre care cel puțin una este finită, dar  $f$  nu este derivabilă în  $x_0$ , atunci punctul  $(x_0, f(x_0))$  se numește *punct unghiular* al graficului lui  $f$ .

<sup>1)</sup> Mulțimea  $E$  poate fi un interval sau o reuniune de intervale nereduse la un punct.

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = |x - 2|$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  are pe  $x = 2$  drept punct unghiular.

*Teoremă.* Dacă  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă în  $x_0 \in E \cap E'^s \cap E'^d$ , atunci  $f$  este derivabilă la stînga și la dreapta; în plus  $f'_s(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0)$  și reciproc.

*Continuitatea funcțiilor derivabile.* Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

*Teoremă.* Fie  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții derivabile în  $x_0 \in E \cap E'$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$  un număr dat. Atunci funcțiile  $f \pm g$ ,  $\lambda f$ ,  $f/g$ ,  $\frac{f}{g}(x_0) \neq 0$ ,  $x_0 \in E \cap E'$  și  $f^g$  (dacă  $f^g$  are șens) sînt derivabile în  $x_0$  și avem

$$i) (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$ii) (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

$$iii) (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$iv) \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$v) (f^g)'(x_0) = (gf^{g-1} \cdot f')(x_0) + ((f^g \ln f) \cdot g')(x_0)$$

*Derivata funcției compuse a două funcții*

Fie  $f: F \rightarrow R$  și  $g: E \rightarrow F$  două funcții. Dacă  $g$  este derivabilă în  $x_0 \in E \cap E'$  și  $f$  în  $g(x_0) \in F \cap F'$ , atunci  $f \circ g$  este derivabilă în  $x_0 \in E$  și avem

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

*Derivata funcției inverse a unei funcții date.* Fie:  $f: I \rightarrow J$ ,  $I, J$  intervale,  $\phi$  funcție continuă și bijectivă și  $f^{-1}: J \rightarrow I$  inversa ei. Dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0 \in I$  și  $f'(x_0) \neq 0$ , atunci  $f^{-1}$  e derivabilă în  $y_0 = f(x_0) \in J$  și avem

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Diferențiala unei funcții.* Fie  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  și  $x_0 \in E \cap E'$ . Funcția liniară  $h \rightarrow f'(x_0)h$  (cu argumentul  $h \in \mathbb{R}$ ) se numește *diferențiala funcției  $f$  în  $x_0$*  și se notează  $df(x_0, h)$ . Deci

$$df(x_0, h) = f'(x_0)h. \quad (1)$$

Diferențiala  $dx$  a funcției identice este egală cu  $h$ , adică cu creșterea argumentului:  $dx = h$ . De aceea relația (1) se mai scrie

$$df(x) = f'(x)dx \quad \text{sau} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Diferențiala funcției compuse  $f(g(x))$  este  $df(g) = f'(g)dg$ .

*Exemplu.* Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x - 1$ ; atunci  $df = (3x^2 + 1)dx$ .

TABELA 5.1. Derivatele și diferențialele funcțiilor elementare

Funcția	Domeniul de definiție	Derivata	Diferențiala	Mulțimea pe care $y$ este derivabilă
$y = a, a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = 0$	$dy = 0$	$\mathbf{R}$
$y = x$	$\mathbf{R}$	$y' = 1$	$dy = dx$	$\mathbf{R}$
$y = ax, a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = a$	$dy = a dx$	$\mathbf{R}$
$y = x^n (n \in \mathbf{N})$	$\mathbf{R}$	$y' = nx^{n-1}$	$dy = nx^{n-1} dx$	$\mathbf{R}$
$y = ax^n (n \in \mathbf{N}), a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = nax^{n-1}$	$dy = nax^{n-1} dx$	$\mathbf{R}$
$y = \frac{1}{x}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$dy = -\frac{1}{x^2} dx$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$y = \frac{1}{x^n}, (n \in \mathbf{N})$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$dy = \frac{-n dx}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$y = x^\alpha, \alpha > 1, \alpha \in \mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$	$[0, +\infty)$
$y = x^\alpha, \alpha < 1, \alpha \in \mathbf{R}$	$(0, +\infty)$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$	$(0, +\infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$	$(0, +\infty)$
$y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$	$[0, +\infty)$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$dy = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx$	$(0, +\infty)$
$y = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad-bc \neq 0$	$\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$dy = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} dx$	$\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

$y = e^x$	$\mathbf{R}$	$y' = e^x$	$dy = e^x dx$	$\mathbf{R}$
$y = ae^x, a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = ae^x$	$dy = ae^x dx$	$\mathbf{R}$
$y = ae^{bx}, a, b \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = abe^{bx}$	$dy = abe^{bx} dx$	$\mathbf{R}$
$y = a^x, a > 0, a \neq 1, a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = a^x \ln a$	$dy = a^x \ln a dx$	$\mathbf{R}$
$y = ba^x, b \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1, a \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$y' = ba^x \ln a$	$dy = ba^x \ln a dx$	$\mathbf{R}$
$y = ba^{cx}, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 1, a > 0$	$\mathbf{R}$	$y' = bca^{cx} \ln a$	$dy = bca^{cx} \ln a dx$	$\mathbf{R}$
$y = \ln x$	$(0, +\infty)$	$y' = \frac{1}{x}$	$dy = \frac{1}{x} dx$	$(0, +\infty)$
$y = \ln  x $	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = \frac{1}{x}$	$dy = \frac{1}{x} dx$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, a \in \mathbf{R}$	$(0, +\infty)$	$y' = 1 / (x \ln a)$	$dy = \frac{1}{x \ln a} dx$	$(0, +\infty)$
$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), a \in \mathbf{R}_+^*$	$\mathbf{R}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$	$\mathbf{R}$
$y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}, a \in \mathbf{R}_+^*$	$(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$	$y' = \frac{1}{x^2 - a^2}$	$dy = \frac{1}{x^2 - a^2} dx$	$(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$
$y = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, a \in \mathbf{R}_+^*$	$(-a, a)$	$y' = \frac{1}{a^2 - x^2}$	$dy = \frac{1}{a^2 - x^2} dx$	$(-a, a)$
$y = \sin x$	$\mathbf{R}$	$y' = \cos x$	$dy = \cos x dx$	$\mathbf{R}$

Tabela 5.1. (continuare)

Funcția	Domeniul de definiție	Derivata	Diferențiala	Mulțimea pe care $y$ este derivabilă
$y = \cos x$	$\mathbf{R}$	$y' = -\sin x$	$dy = -\sin x dx$	$\mathbf{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$\mathbf{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi \right)$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi \right)$
$y = \operatorname{ctg} x$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} =$ $= -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$
$y = \sec x$	$\mathbf{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi \right)$	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$dy = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi \right)$
$y = \operatorname{cosec} x$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$dy = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$
$y = \operatorname{arc} \sin x$	$[-1, 1]$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$(-1, 1)$
$y = \operatorname{arc} \cos x$	$[-1, 1]$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$(-1, 1)$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$\mathbf{R}$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$dy = \frac{1}{1+x^2} dx$	$\mathbf{R}$
$y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$	$\mathbf{R}$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$dy = -\frac{1}{1+x^2} dx$	$\mathbf{R}$



$y = \operatorname{arc\,sec} x$ $0 < y < \frac{\pi}{2}$	$[1, +\infty)$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$	$(1, +\infty)$
$y = \operatorname{arc\,sec} x$ $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$	$(-\infty, -1]$	$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$	$(-\infty, -1)$
$y = \operatorname{arc\,cosec} x$ $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$	$[1, +\infty)$	$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$	$(1, +\infty)$
$y = \operatorname{arc\,cosec} x$ $\frac{-\pi}{2} \leq y < 0$	$(-\infty, -1]$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$	$(-\infty, -1)$
$y = \operatorname{sh} x$	<b>R</b>	$y' = \operatorname{ch} x$	$dy = \operatorname{ch} x dx$	<b>R</b>
$y = \operatorname{ch} x$	<b>R</b>	$y' = \operatorname{sh} x$	$dy = \operatorname{sh} x dx$	<b>R</b>
$y = \operatorname{th} x$	<b>R</b>	$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$dy = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx$	<b>R</b>
$y = \operatorname{cth} x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$dy = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$
$y = \operatorname{sech} x$	<b>R</b>	$y' = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$	$dy = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx$	<b>R</b>
$y = \operatorname{csech} x$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$y' = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}$	$dy = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} dx$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$

Tabela 5.1(continuare)

Funcția	Domeniul de definiție	Derivata	Diferențiala	Mulțimea pe care $y$ este derivabilă
$y = \arg \operatorname{sh} x$ $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\mathbb{R}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$	$\mathbb{R}$
$y = \arg \operatorname{ch} x$ $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); y \geq 0$	$[1, +\infty)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$	$(1, +\infty)$
$y = \arg \operatorname{ch} x$ $x = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); y \leq 0$	$[1, +\infty)$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$dy = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$	$(1, +\infty)$
$y = \arg \operatorname{th} x$ $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	$dy = \frac{1}{1-x^2} dx$	$(-1, 1)$
$y = \arg \operatorname{cth} x$ $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	$dy = \frac{1}{1-x^2} dx$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$y = \arg \operatorname{sech} x; y \geq 0$	$(0, 1]$	$y' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$	$(0, 1)$
$y = \arg \operatorname{sech} x; y \leq 0$	$(0, 1]$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$	$(0, 1)$
$y = \arg \operatorname{cosech} x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y' = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2+1}}$	$dy = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2+1}} dx$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ținând seama de mulțimile pe care funcțiile elementare sînt derivabile, de regulile precedente de derivare a funcțiilor elementare (tabela 5.1) și de regula de derivare a funcțiilor compuse ( $y(x) = f(u(x))$ ,  $y'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ ;  $y(x) = f(u(v(x)))$   $y' = f'(u) u'(v) v'(x)$ ), obținem și următoarele formule de derivare și de diferențiere

Tabela 5.1. (continuare)

Funcția	Derivata	Diferențiala
$y = u^*$	$y' = u'$	$dy = du$
$y = au, a \in \mathbf{R}$	$y' = au'$	$dy = a du$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$dy = du \pm dv$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$dy = v du + u dv$
$y = uvw$	$y' = u'vw + uv'w + uvw'$	$dy = vw du + uv dv + uv dw$
$y = \frac{1}{v}$	$y' = -\frac{v'}{v^2}$	$dy = -\frac{1}{v^2} dv$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$dy = \frac{v du - u dv}{v^2}$
$y = u^n, n \in \mathbf{Z}, u \neq 0$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$	$dy = nu^{n-1} du$
$y = au^n, n \in \mathbf{Z}, u \neq 0, a \in \mathbf{R}$	$y' = nau^{n-1} \cdot u'$	$dy = nau^{n-1} du$
$y = u^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}, u > 0$	$y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$dy = \alpha u^{\alpha-1} \cdot du$
$y = \sqrt{u}, u > 0$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[n]{u}, n = \text{impar}; u \neq 0$	$y' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$dy = \frac{du}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = \sqrt[n]{u}, u > 0, n = \text{par}$	$y' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$dy = \frac{du}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$	$dy = e^u \cdot du$
$y = a e^u, a \in \mathbf{R}$	$y' = au' e^u$	$dy = a e^u du$
$y = C a^u, C \in \mathbf{R}$ $a > 0, a \neq 1, a \in \mathbf{R}$	$y' = C u' a^u \frac{\log_b a}{\log_b e}$	$dy = C a^u \cdot \frac{\log_b a}{\log_b e} \cdot du$
$y = \ln u, u > 0$	$y' = \frac{u'}{u}$	$dy = \frac{1}{u} du$

\* Am notat cu  $u, v, w, \dots$  funcții reale de argument real, deriyabile.

Tabela 5.1 (continuare)

Funcția	Derivata	Diferențiala
$y = \ln  u $	$y' = \frac{u'}{u}$	$dy = \frac{1}{u} du$
$y = \log_a u, u > 0, a \in \mathbb{R}$ $a > 0, a \neq 1$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$dy = \frac{1}{u} \log_a e du$
$y = \sin u$	$y' = u' \cdot \cos u$	$dy = (\cos u) du$
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \sin u$	$dy = -(\sin u) du$
$y = \operatorname{tg} u, u \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$dy = \frac{du}{\cos^2 u}$
$y = \operatorname{cotg} u, u \notin \mathbb{Z}\pi$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$dy = -\frac{du}{\sin^2 u}$
$y = \sec u, u \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$	$y' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot u'$	$dy = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot du$
$y = \operatorname{cosec} u, u \notin \mathbb{Z}\pi$	$y' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot u'$	$dy = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot du$
$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$dy = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du$
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du$
$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$dy = \frac{1}{1+u^2} \cdot du$
$y = \operatorname{arccotg} u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$	$dy = \frac{-1}{1+u^2} \cdot du$
$y = \operatorname{arcsec} u$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$	$dy = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot du$
$y = \operatorname{arccosec} u$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$	$dy = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot du$
$y = u^v, u > 0$	$y' = y \left[ \frac{u'}{u} v + \right.$ $\left. + v' \ln u \right]$	$dy = y \left[ \frac{1}{u} v \cdot du + \right.$ $\left. + (\ln u) dv \right]$
$y = x^v, x > 0$	$y' = vx^{v-1} + x^v \cdot v' \cdot \ln x$	$dy = vx^{v-1} dx + x^v (\ln x) dv$
$y = x^x, x > 0$	$y' = x^x(1 + \ln x)$	$dy = x^x(1 + \ln x) \cdot dx$

**Derivata unui determinant.** Fie  $a_{ij} : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $I$  interval,  $n^2$  funcții de clasă  $C^1$  pe  $I$  și  $D(x) = |a_{ij}(x)|$ . Atunci avem

$$D'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

### 5.8.1. Proprietăți ale funcțiilor derivabile

*Puncte de maxim și minim local ale unei funcții  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $I \subset \mathbf{R}$  interval.* Spunem că punctul  $a \in I$  este un punct de *maxim local* strict pentru  $f$ , dacă există o vecinătate  $U$  a lui  $a$ , astfel încît

$$f(x) < f(a), \quad \forall x \in U \cap (I \setminus \{a\}).$$

Spunem că punctul  $b \in I$  este un punct de *minim local* strict pentru  $f$ , dacă există o vecinătate  $U$  a lui  $b$ , astfel încît

$$f(x) > f(b), \quad \forall x \in U \cap (I \setminus \{b\}).$$

Dacă inegalitățile stricte se înlocuiesc cu inegalități necstricte, obținem definiția maximului și minimului în sens larg.

Punctele de maxim și cele de minim ale lui  $f$  se numesc *puncte de extrem* ale lui  $f$ .

*Teorema lui Fermat.* Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă pe  $I$ . În orice punct de extrem local (din interiorul lui  $I$ ) derivata lui  $f$  este nulă.

*Teorema lui Rolle.* Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  și  $a, b \in I$ , cu  $a < b$ .

- Dacă: 1)  $f$  este continuă pe intervalul  $[a, b]$ ;  
2)  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ ;  
3)  $f(a) = f(b)$ ;

atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încît  $f'(c) = 0$ .

*Corolar 1.* Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă pe intervalul  $I$ . Atunci între două zerouri ale lui  $f$  există cel puțin un zero al derivatei  $f'$ .

*Corolar 2.* Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție definită pe un interval și derivabilă pe acest interval. Dacă  $a$  și  $b$  sînt două rădăcini consecutive ale derivatei și  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , atunci  $f$  are exact o rădăcină  $c$  între  $a$  și  $b$ . Dacă în schimb  $f(a) \cdot f(b) > 0$ , atunci  $f$  nu are rădăcini în intervalul  $(a, b)$ .

*Teorema lui Cauchy.* Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ , două funcții și  $a, b \in I$ ,  $a < b$ . Dacă:

- 1)  $f$  și  $g$  sînt continue pe intervalul închis  $[a, b]$ .  
2)  $f$  și  $g$  sînt derivabile pe intervalul deschis  $(a, b)$ .  
3)  $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$ .

atunci  $g(a) \neq g(b)$  și există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încît

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

*Teorema lui Lagrange.* Fie  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție,  $a, b \in I$  și  $a < b$ . Dacă

- 1)  $f$  este continuă pe intervalul închis  $[a, b]$ ,

2)  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ , astfel încît

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

### 5.8.2. Consecințe ale teoremei lui Lagrange

1. Dacă o funcție derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.

2. Dacă  $f$  și  $g$  sînt două funcții cu derivatele egale pe un interval, atunci funcțiile diferă printr-o constantă pe acel interval.

3. Fie  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă și  $I \subset E$  un interval. Dacă  $\forall x \in I$ , avem  $f'(x) > 0$ , atunci  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ . Dacă  $\forall x \in I$ , avem  $f'(x) < 0$  atunci  $f$  este strict descrescătoare pe  $I$ .

4. Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  (cu  $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ ) o funcție derivabilă. Dacă  $f(a) \geq 0$  și  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (a, b)$ , atunci  $f > 0$  pe  $(a, b)$ .

5. Fie  $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă și  $c \in (a, b)$ . Dacă  $f'$  se anulează în  $c$  schimbîndu-și semnul, atunci  $c$  este un punct de extrem local pentru  $f$ .

6. Fie  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă pe  $I$  și  $x_0 \in I$ . Dacă  $f$  este derivabilă pe  $I \setminus \{x_0\}$  și dacă derivata  $f'$  are limită în  $\mathbf{R}$  în  $x_0$ , atunci  $f$  este cu derivată în  $x_0$  și  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

*Exemplu.* Fie  $f(x) = \arcsin x$ ,  $x \in [-1, 1]$ . După consecința de mai sus  $f$  este cu derivată în  $-1$  și  $1$ , anume  $f'(-1) = +\infty = f'(1)$ .

*Teorema lui Darboux.* Fie  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă pe intervalul  $I$ . Atunci derivata  $f'$  a lui  $f$  are proprietatea lui Darboux, adică nu poate trece de la o valoare a ei la alta, fără a trece prin toate valorile intermediare.

### 5.8.3. Derivate de ordin superior

*Definiție.* Fie  $I$  un interval și  $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă. Spunem că  $f$  este derivabilă de două ori în  $x_0 \in I$ , dacă funcția  $f': I \rightarrow \mathbf{R}$  este derivabilă în  $x_0$ . Derivata lui  $f'$  în  $x_0$  se numește derivata de ordinul al doilea a lui  $f$  și se notează  $f''(x_0)$ ,  $D^2f(x_0)$ ,  $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$ .

Deci

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Analog se definesc:  $f'''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ .

*Formula lui Leibniz.* Fie  $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții de  $n$  ori derivabile pe  $I$ . Atunci  $fg$  este de  $n$  ori derivabilă pe  $I$  și avem relația:

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) g'(x) + \dots + \\ &+ C_n^{n-1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^n f(x) g^{(n)}(x), \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Cîteva derivate de ordinul  $n$ :

$$1. (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$$

$$2. (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$$

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbf{N}$$

$$4. (ae^x)^{(n)} = ae^x, \quad \forall x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$$

$$5. (x^m)^{(n)} = A_m^n x^{m-n}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, 1 \leq n \leq m$$

$$6. (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n, \quad a > 0, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$$

$$7. (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}, \quad \forall x \in \mathbf{R}_+^*, n \in \mathbf{N}$$

$$8. (\operatorname{sh} x)^{(2n)} = \operatorname{sh} x; (\operatorname{sh} x)^{(2n-1)} = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbf{R}, n \geq 1$$

$$9. (\operatorname{ch} x)^{(2n)} = \operatorname{ch} x; (\operatorname{ch} x)^{(2n-1)} = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbf{R}, n \geq 1$$

$$10. y = \operatorname{arctg} x; y^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin\left(y + n \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 1.$$

#### 5.8.4. Forme nedeterminate. Înlăturarea nedeterminărilor

În cazurile exceptate de teoremele relative la operațiile cu limite de funcții, trebuie efectuat un studiu direct pentru a stabili dacă există sau nu limite.

Uneori derivatele sînt de folos în aceste cazuri, în primul rînd în cazul  $\frac{0}{0}$ , prin anumite teoreme (l'Hospital, Cauchy).

Ridicarea celorlalte nedeterminări, de forma  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  și  $1^\infty$ , se reduce la înlăturarea unei nedeterminări de forma  $\frac{0}{0}$ .

☛ *Teorema lui l'Hospital.* Fie  $I$  un interval oarecare al axei reale și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $I$ . Fie  $f$  și  $g$  două funcții definite pe  $I \setminus \{x_0\}$ . Dacă:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ sau } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$$

2)  $f$  și  $g$  sînt derivabile pe  $I \setminus \{x_0\}$ .

3)  $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ .

4) Există  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbf{R}}$ ,

atunci

$\alpha) g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

$\beta)$  Funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

*Exemple.* 1) Fie  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  cu  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  și  $g(x) = x - 1$ . Se cere  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Cu teorema lui l'Hospital găsim

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{1} = -1.$$

2) Fie  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln(1 + e^x)$ ,  $g(x) = x$ .

Se cere  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Sîntem în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$  și cu teorema lui l'Hospital corespunzătoare obținem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1 + e^x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1. \end{aligned}$$

3) Exemplul de mai jos ne arată că reciproca teoremei precedente nu este adevărată, în sensul că, de pildă,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  poate exista, fără ca  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  să existe. Astfel pentru  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x$  și  $g(x) = x + \sin x$ , avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x} = 1$ , în vreme ce  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \cos x}$  nu există.

*Teorema lui Cauchy.* Fie  $I$  un interval al axei reale,  $x_0 \in I$  și  $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții. Dacă

1)  $f(x_0) = 0$  și  $g(x_0) = 0$

2)  $f$  și  $g$  sînt derivabile în  $x_0$  și  $g'(x_0) \neq 0$ ,



atunci

α) Există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$ , astfel încît  $g(x_0) \neq 0$  pentru orice  $x \in U$  și  $x \neq x_0$  și

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

*Exemplu.* Fie  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  două funcții definite astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 1 - \cos x, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \quad \text{și} \quad g(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ x, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Să calculăm  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Cu teorema lui Cauchy obținem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0, \quad \text{căci } f'(0) = 0 \text{ și } g'(0) = 1.$$

Teorema lui l'Hospital nu se aplică.

## 5.8.5. Reprezentarea grafică a funcțiilor

*Considerații generale.* Fie  $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție derivabilă de două ori și  $x_0 \in (a, b)$ .

1. Dacă  $f'$  se anulează în  $x_0$  și își schimbă semnul, atunci  $x_0$  este un punct de extrem local pentru  $f$  și anume:

α) Dacă derivata  $f'$  este strict pozitivă la stînga lui  $x_0$  și strict negativă la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim local pentru  $f$ .

β) Dacă derivata  $f'$  este strict negativă la stînga lui  $x_0$  și strict pozitivă la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este un punct de minim local pentru  $f$ .

2. Dacă  $f''$  se anulează în  $x_0$  și își schimbă semnul, atunci  $x_0$  este un punct de inflexiune.

3. Dacă  $f'' > 0$  pe  $(a, b)$ , atunci  $f$  e convexă pe acest interval, iar dacă  $f'' < 0$  pe  $(a, b)$ , atunci  $f$  este concavă pe  $(a, b)$ .

4. Fie  $x_0$  un punct de extrem local pentru  $f$ .

Dacă  $f''(x_0) > 0$ , atunci  $x_0$  este un punct de minim local pentru  $f$ , iar dacă  $f''(x_0) < 0$ , atunci  $x_0$  este un punct de maxim local.

*La trasarea graficului unei funcții se efectuează următoarele operații:*

1) a). Se determină domeniul de definiție a funcției. Dacă se dă  $f: E \subset \mathbf{R} \rightarrow F \subset \mathbf{R}, f(x) = \dots$ , evident atunci domeniul respectiv este chiar  $E$ . Dacă nu se indică  $E$ , ci se dă doar  $f(x) = \dots$ , atunci  $E$  este reprezentat de mulțimea punctelor dreptei reale, pentru care operațiile prin care este definită  $f$  au sens.

b) Se determină (dacă există) punctele de intersecție cu axele de coordonate, adică punctele de forma  $(0, f(0))$  sau  $(x, f(x) = 0)$ .

c) Se determină limitele funcției  $f$  la capetele intervalelor de existență, inclusiv  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , dacă  $E$  include intervale de forma  $(-\infty, c)$  și  $(d, +\infty)$ .

2) Se determină (dacă există) simetriile pe care le poate prezenta graficul lui  $f$  (simetrie față de  $Ox$ , față de  $Oy$ , față de  $O$  sau față de alte puncte din  $\mathbf{R}^2$ ) și, pentru funcțiile periodice, perioada (pentru a desena graficul lui  $f$  numai pe o perioadă).

3) Se află (dacă există) punctele de discontinuitate și limitele laterale corespunzătoare ale lui  $f$ .

4) Se determină *asimptotele verticale* (corespunzătoare acelor puncte  $a \in E$  în care cel puțin o limită laterală este infinită); ecuația unei asemenea asimptote verticale va fi de forma  $x = a$ .

5) Se determină *asimptotele orizontale* (asociate acelor puncte  $b, b' \in F$  care au proprietatea că  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  sau  $b' = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (când  $E$  include intervale de tipul  $(-\infty, c)$  sau  $(d, +\infty)$ ); ecuația unei asemenea asimptote orizontale va fi de forma  $y = b$  (la ramura de la  $-\infty$ ) sau  $y = b'$  (la ramura de la  $+\infty$ ).

6) Se determină *asimptotele oblice (rectilinii)* (adică dreptele de ecuație  $y = mx + n$ , cu proprietatea  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$  (dacă  $E$  include intervale de forma  $(-\infty, c)$ ); rezultă  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$ ; caz analog când  $E$  include intervale de forma  $(d, +\infty)$ .

7) Se cercetează dacă graficul funcției  $f$  admite și *asimptote curbilinii*. Curba de ecuație  $y = g(x)$  este o asimptotă curbilinie a graficului funcției  $f \Leftrightarrow f(x)$  se poate scrie sub forma  $f(x) = g(x) + h(x)$ , cu  $\lim_{x \rightarrow -\infty \text{ sau } +\infty} h(x) = 0$  (dacă  $E$  include intervale de forma  $(-\infty, c)$  sau  $(d, +\infty)$ );  $g, h: E \rightarrow \mathbf{R}$ ). De pildă funcția  $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2(x+9)/(x+1)$  admite dreptă asimptotă curbilinie parabola de ecuație  $y = x^2 + 8x - 8$ .

8) Se calculează  $f'(x)$  și rădăcinile acesteia. Abscisele punctelor de extrem local se găsesc printre rădăcinile derivatei. Se întocmește un tablou cu semnul derivatei pe  $E$ .

9) Se calculează  $f''(x)$  și rădăcinile acesteia. Abscisele punctelor de inflexiune (dacă există) se găsesc printre rădăcinile lui  $f''$ . Se întocmește un tablou cu semnul derivatei secunde, în care tablou se includ și punctele de discontinuitate ale derivatei a doua, când asemenea puncte există.

10) Se calculează coeficienții unghiulari ai (semi)tangentelor la grafic în punctele remarcabile ale acestuia.

11) Se întocmește tabloul general de variație a funcției, cuprinzând 4 linii cu valorile importante ale lui  $x$ , cu  $f'(x)$ , cu  $f(x)$  și  $f''(x)$ .

12) Se reprezintă apoi, într-un reper ortogonal, punctele remarcabile  $(x, f(x))$  ale curbei reprezentative, așa cum rezultă din tabloul general, și asimptotele acestuia (dacă există). Ținând seama de caracterul crescător sau descrescător al funcției, de caracterul ei concav sau convex, se unesc punctele desenate printr-o trăsătură continuă. Dacă vrem să trasăm graficul lui  $f$  cu o precizie și mai mare, putem desena și câteva puncte ajutătoare ale graficului, de forma  $(x_i, f(x_i))$ , cu  $i = 1, 2, \dots$ , și  $x_i \in E$ .

## 5.9. Primitive. Proprietăți

*Definiție.* Fie  $I \subset \mathbf{R}$  un interval și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție. Funcția  $F: I \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *primitivă (exactă)* sau *antiderivată* a funcției  $f$ , dacă:

1)  $F$  este derivabilă pe  $I$ .

2)  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ .

*Exemplu.* Fie  $\sin: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ ; atunci o primitivă a acestei funcții este  $F(x) = -\cos x$ .

*Propoziție.* Fie  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție care admite primitive. Atunci orice două primitive ale lui  $f(x)$ ,  $F_1(x)$  și  $F_2(x)$ , diferă între ele printr-o constantă.

*Definiție.* Fie  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție care admite primitive. Se numește *integrală nedefinită* mulțimea tuturor primitivelor lui  $f$  și se notează

$$\int f, \int f dx \text{ sau } \int f(x) dx.$$

*Exemplu.* Pentru  $f(x) = \sin x$ , din exemplul precedent, avem  $\int \sin x dx = -\cos x + C, C \in \mathbf{R}$ .

### 5.9.1. Proprietăți

1) Orice funcție continuă  $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  admite primitive.

2) Dacă  $f, g: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sunt două funcții care admit primitive, atunci și funcția  $\alpha f + \beta g$ , cu  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , admite primitive și avem relația

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

3) O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux.

4) Dacă  $f$  este definită pe intervalul  $I$  al axei reale, cu valori reale, și imaginea lui  $I$  prin  $f$  nu este un interval atunci  $f$  nu admite primitive.

Tabela 5.2 Primitive imediate ale unor funcții elementare

Nr. crt.	Funcția	Domeniul de definiție	Primitiva
1	$f(x) = x^n$ $n \in \mathbf{N}$	$\mathbf{R}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
2	$f(x) = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$(0, +\infty)$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
3	$f(x) = \sqrt[m]{x}$ $m \in \mathbf{N}, m \geq 2$	$(0, +\infty)$	$\int \sqrt[m]{x} dx =$ $= \frac{m}{m+1} \cdot \sqrt[m]{x^{m+1}}$
4	$f(x) = a^x$ $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\mathbf{R}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$

Tabla 5.2 (continuare)

Nr. crt.	Funcția	Domeniul de definiție	Primitiva
5	$f(x) = e^x$	$\mathbf{R}$	$\int e^x dx = e^x$
6	$f(x) = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x)$
7	$f(x) = \frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
8	$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$(-\infty, -a)$ sau $(a, +\infty)$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$
9	$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$(-a, a)$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x}$
10	$f(x) = \sin x$	$\mathbf{R}$	$\int \sin x dx = -\cos x$
11	$f(x) = \cos x$	$\mathbf{R}$	$\int \cos x dx = \sin x$
12	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + Z\pi\right)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
13	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus Z\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$
14	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + Z\pi\right)$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x $
15	$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$I \subset \mathbf{R} \setminus Z\pi$	$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln \sin x $
16	$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + Z\pi\right)$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x}$
17	$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus Z\pi$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x}$

Nr. crt.	Funcția	Domeniul de definiție	Primitiva
18	$f(x) = \sin \alpha x$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R}$	$\int \sin \alpha x \, dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha}$
19	$f(x) = \cos \alpha x$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R}$	$\int \cos \alpha x \, dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$
20	$f(x) = \sin^2 x$	$\mathbf{R}$	$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
21	$f(x) = \cos^2 x$	$\mathbf{R}$	$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$
22	$f(x) = \frac{1}{\sin x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}\pi$	$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right $
23	$f(x) = \frac{1}{\cos x}$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \left( \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi \right)$	$\int \frac{1}{\cos x} \, dx =$ $= -\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right $
24	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} =$ $= \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$
25	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$I \subset (-\infty, -a)$ sau $I \subset (a, +\infty)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$ $= \ln \left  x + \sqrt{x^2 - a^2} \right $
26	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(-1, 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$
27	$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(-1, 1)$	$-\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arccos} x$
28	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$(-a, a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

Tabela 5.2 (continuare)

Nr. crt.	Funcția	Domeniul de definiție	Primitiva
29	$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$(-a, a)$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a}$
30	$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctg x$
31	$f(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{-dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$
32	$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$
33	$f(x) = \frac{-1}{a^2 + x^2}$ $a \in \mathbf{R}, a > 0$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{-dx}{x^2 + a^2} =$ $= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a}$
34	$f(x) = e^{ax} \sin bx$ $a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 0$	$\mathbf{R}$	$\int e^{ax} \sin bx =$ $= \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot$ $\times e^{ax}$
35	$f(x) = e^{ax} \cos bx$ $a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 0$	$\mathbf{R}$	$\int e^{ax} \cos bx dx =$ $= \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}$
36	$f(x) = \operatorname{sh} x$	$\mathbf{R}$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$
37	$f(x) = \operatorname{ch} x$	$\mathbf{R}$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$
38	$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$
39	$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbf{R}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$

## 5.9.2. Metode de calcul al primitivelor

1) *Metoda de antiderivare prin părți.* Dacă  $u, v: I \rightarrow \mathbf{R}$  sînt funcții derivabile cu derivatele continue, atunci  $uv, u'v$  și  $uv'$  admit primitive și avem

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

2) *O metodă de antiderivare bazată pe o schimbare de variabilă:* Calcularea primitivelor de forma:

$$A = \int f(u(x)) u'(x) dx,$$

unde  $t = u(x)$  este o funcție definită pe  $I$  cu valori în  $J$ , iar  $f(t)$  este o funcție definită pe  $J$  cu valori în  $\mathbf{R}$ .

Dacă  $u$  este derivabilă pe  $I$  și  $f$  are primitive pe  $J$ , atunci funcția  $f(u(x))u'(x)$ , definită pe  $I$  cu valori în  $\mathbf{R}$ , are primitive pe  $I$ . Mai precis, dacă  $F(t)$  este o primitivă a lui  $f(t)$ , atunci avem:

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

În rezumat calculul primitivei se face după schema:

- 1) Se face substituția  $t = u(x)$
- 2) Se diferențiază această funcție  $dt = u'(x) dx$
- 3) Se înlocuiește (formal) în  $A$  și se obține

$$A = \int f(t) dt.$$

- 4) Se calculează o primitivă  $F(t)$  a lui  $f(t)$ .
- 5) Se scrie  $A$

$$A = \int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

*Exemplu* Fie  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Se cere o primitivă a lui  $f$ .

Observăm că  $A$  se scrie astfel

$$A = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}}.$$

Avem deci:  $t = x^2$ ,  $t: (-1, 1) \rightarrow [0, 1)$ ;  $t$  sau  $u(x)$  este derivabilă pe  $(-1, 1) = I$ ;  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $f: [0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ , cu primitive pe  $[0, 1) = J$ , de pildă  $F(t) = \arcsin t$ . Rezultă că  $\frac{1}{2} \cdot f(x^2) \cdot (x^2)'$ , definită pe  $(-1, 1)$  cu valori în  $\mathbf{R}$  are primitive pe  $(-1, 1)$  și

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$$

*În rezumat*

- 1)  $t = x^2$
- 2)  $dt = 2x dx$
- 3)  $A = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$4) F(t) = \frac{1}{2} \arcsin t$$

$$5) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C.$$

Dăm în continuare o tabelă cu primitive ale unor funcții compuse, deduse din tabela anterioară a primitivelor imediate, cu ajutorul metodei dezvoltate la acest punct. Peste tot vom admite că  $u: I \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă și cu derivata continuă pe  $I$ .

Tabela. 5.3. Alte primitive

Nr. crt.	Primitive ale unor funcții compuse
1	$\int u^n(x) u'(x) dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}, \quad n \in \mathbf{Z}, n \neq -1$
2	$\int u^\alpha(x) u'(x) dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}, u: I \rightarrow J \subset (0, +\infty)$
3	$\int \frac{u'(x) dx}{\sqrt[m]{u^{m-1}(x)}} = \sqrt[m]{u(x)} \quad m \in \mathbf{N}, m \geq 2, u: I \rightarrow J \subset (0, +\infty)$
4	$\int a^{u(x)} u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}, \quad a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$
5	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln  u(x) , \quad \forall x \in I, u(x) \neq 0$
6	$\int \frac{u'(x) dx}{u^2(x) - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{u(x) - a}{u(x) + a} \right  \quad a \in \mathbf{R}, a > 0, \forall x \in I, u(x) \in \{-a, a\}$
7	$\int \sin u(x) \cdot u'(x) dx = -\cos u(x),$
8	$\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x),$
9	$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)} dx = -\operatorname{ctg} u(x) \quad \forall x \in I, u(x) \notin \mathbf{Z}\pi$
10	$\int \frac{u'(x) dx}{\sin u(x)} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{u(x)}{2} \right , \quad \forall x \in I, u(x) \notin \mathbf{Z}\pi$
11	$\int \frac{u'(x) dx}{\cos u(x)} = -\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{u(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right , \quad \forall x \in I, u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
12	$\int \frac{u'(x) dx}{\cos^2 u(x)} = \operatorname{tg} u(x), \quad \forall x \in I, u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$
13	$\int \operatorname{tg} u(x) \cdot u'(x) dx = -\ln  \cos u(x)  \quad \forall x \in I, u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbf{Z}\pi$



$$14 \quad \int \cotg u(x) \cdot u'(x) dx = -|\sin u(x)|, \quad \forall x \in I, u(x) \notin \mathbb{Z}\pi$$

$$15 \quad \int \frac{\cos u(x)}{\sin^2 u(x)} u'(x) dx = -\frac{1}{\sin u(x)}, \quad \forall x \in I, u(x) \notin \mathbb{Z}\pi$$

$$16 \quad \int \frac{\sin u(x)}{\cos^2 u(x)} u'(x) dx = \frac{1}{\cos u(x)}, \quad \forall x \in I, u(x) \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$$

$$17 \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2 + u^2(x)}} dx = \ln(u(x) + \sqrt{a^2 + u^2(x)}) \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$18 \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - a^2}} dx = \ln |u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2}| \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$u(I) \subset (-\infty, -a) \text{ sau } (a, +\infty)$$

$$19 \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}} dx = \arcsin \frac{u(x)}{a}, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0, u(I) \subset (-a, a)$$

$$20 \quad \int \frac{u'(x)}{a^2 + u^2(x)} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{a}, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$21 \quad \int \cos^2 u(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u(x)}{2} + \frac{\sin 2u(x)}{4}$$

$$22 \quad \int \sin^2 u(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u(x)}{2} - \frac{\sin 2u(x)}{4}$$

3) O altă metodă de calcul al unor primitive prin schimbarea de variabilă:  
Calcularea primitivelor de forma

$$B = \int f(u(x)) dx,$$

unde  $t = u(x)$  este o funcție definită pe  $I$  cu valori în  $J$ , iar  $f(t)$  este o funcție definită pe  $J$  cu valori în  $\mathbb{R}$ .

Dacă  $t = u(x)$  este strict monotonă și derivabilă pe  $I$ , dacă inversa ei  $x = v(t)$ ,  $v: J \rightarrow I$ , are derivata  $v'(t)$  continuă pe  $J$ , dacă  $f(t)$  este continuă pe  $J$  și dacă  $F(t)$  este o primitivă a lui  $f(t) \cdot v'(t)$ , atunci

$$\int f(u(x)) dx = F(u(x)) + C$$

Schemă formală:

- 1) Se face substituția  $t = u(x)$
- 2) Se află inversa lui  $u$ ,  $x = v(t)$
- 3) Se diferențiază ultima funcție  $dx = v'(t) dt$ .
- 4) Se înlocuiește în  $B$  care devine

$$B = \int f(t) \cdot v'(t) dt$$

5) Se află  $F(t) = \int f(t) v'(t) dt$

6) Se scrie  $B$

$$\int f(u(x)) dx = F(u(x)) \div C.$$

*Exemplu.* Fie  $f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$ ,  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ . Considerăm  $t = u(x) = \sqrt{x}$ ,  $u: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , funcție strict monotonă și derivabilă pe  $(0, \infty) = I$ . Inversa ei  $x = v(t) = t^2$ ,  $v: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  este continuă și are derivata  $v'(t) = 2t$  continuă pe  $(0, \infty) = J$ . În plus  $f(t) = \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$  este continuă pe  $(0, \infty) = J$ . O primitivă a lui  $f(t) \cdot v'(t) = \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot 2t$  este imediată  $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t \sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{4}$ .

Acum  $\int \cos^2 \sqrt{x} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \cos 2\sqrt{x} \div C.$

În rezumat:

1)  $t = \sqrt{x}$

2)  $x = t^2$

3)  $dx = 2t dt$

4)  $B = \int \cos^2 t \cdot 2t dt = \int (1 + \cos 2t) \cdot t dt$

5)  $F(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t \sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{4}$

6)  $\int \cos^2 \sqrt{x} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} \sin 2\sqrt{x} + \frac{\cos 2\sqrt{x}}{4} \div C$

4) *Calculul primitivelor prin recurență.* Această metodă se aplică la determinarea primitivelor funcțiilor  $f$  care depind și de numărul natural  $n$ ,

$$f: I \times M \rightarrow \mathbf{R}, M \subset \mathbf{N}, (x, n) \rightarrow f(x, n).$$

Folosind o altă metodă de calcul al primitivelor (de pildă metoda integrării prin părți), sîntem conduși la determinarea unei primitive pentru  $f(x, n - 1)$  sau  $f(x, n - 2)$ . Iterînd procedeul ajungem la determinarea primitivelor funcțiilor  $f(x, 0)$ ,  $f(x, 1)$  sau  $f(x, 2)$  care se calculează imediat sau sint tabelate.

*Exemplu:* Fie  $f: I \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, n) = x^n e^x$ . Să se stabilească o formulă de recurență pentru calculul lui  $I_n = \int x^n e^x dx$ . Integrăm sau antiderivăm prin părți luînd  $u = x^n$  (deci  $du = nx^{n-1} dx$ ) și  $dv = e^x dx$  (cu  $v = e^x$ ).  
Găsim

$$I_n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \text{ sau}$$

$$I = x^n e^x - nI_{n-1} \quad (1)$$

Evident  $I_0 = e^x$ . Din (1) deducem

$$I_1 = x e^x - e^x, I_2 = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) \text{ etc.}$$

*Formule de recurență utile în calculul primitivelor*

$$A_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}; \quad A_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \\ + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} A_{n-1}, \quad n \geq 2$$

$$B_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}; \quad B_n = -\frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 - a^2)^{n-1}} - \\ - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot B_{n-1}, \quad n \geq 2$$

$$C_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx; \quad C_m = \frac{x^{m-1} \sqrt{a^2 + x^2}}{m} - \frac{(m-1)a^2}{m} C_{m-2}, \quad m \geq 2$$

$$D_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}; \quad D_m = \frac{x^{m-1} \sqrt{x^2 - a^2}}{m} + \frac{(m-1)a^2}{m} D_{m-2}, \quad m \geq 2$$

$$E_m = \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 + x^2}}; \quad E_m = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(m-1)a^2 x^{m-1}} - \frac{m-2}{(m-1)a^2} \cdot E_{m-2}, \quad m \geq 2$$

$$F_n = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}}; F_n = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{(n-1)a^2 x^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)a^2} F_{n-2}, n \geq 2$$

$$G_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; G_m = -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{m-1}{m} \cdot a^2 G_{m-2}, m \geq 2$$

$$H_m = \int \frac{dx}{x^m \sqrt{a^2 - x^2}}; H_m = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{a^2(m-1)} \cdot H_{m-2}, m \geq 2$$

$$J_m = \int (\ln x)^m dx; J_m = x \ln^m x - m J_{m-1}, m \geq 1$$

$$K_n = \int \sin^n x dx; K_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}, n \geq 2$$

$$L_n = \int \cos^n x dx; L_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} L_{n-2}, n \geq 2$$

$$M_n = \int \operatorname{tg}^n x dx; M_n = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - M_{n-2}, n \geq 2$$

$$N_n = \int \operatorname{cotg}^n x dx; N_n = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} x - N_{n-2}, n \geq 2$$

$$P_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; P_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} P_{n-2}, n \geq 2$$

$$Q_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}; Q_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} Q_{n-2}, n \geq 2$$

$$R_n = \int x^n \sin x dx; R_n = -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1)R_{n-2}, n \geq 2$$

$$S_n = \int x^n \cos x dx; S_n = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1)S_{n-2}, n \geq 2$$

5) *Metoda coeficienților nedeterminați pentru calcularea primitivelor din funcții transcendente*

Dacă  $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $P_n$  un polinom de gradul  $n$ , atunci o primitivă a lui  $f$  este  $F(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$ , unde  $Q_n$  este tot un polinom de gradul  $n$ .

Pentru a determina pe  $F(x)$  este suficient să determinăm pe  $Q_n(x)$ . În acest scop, după definiția primitivei, avem

$$(e^{\alpha x} Q_n(x))' = e^{\alpha x} P_n(x). \quad (1)$$

De aici rezultă coeficienții lui  $Q_n$  și deci  $F(x)$  este cunoscută.

*Exemplu.* Să se afle o primitivă a lui  $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x}$ .

Din egalitatea

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x} dx = (A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^{3x} + C,$$

prin derivare găsim (după suprimarea lui  $e^{3x}$ )

$$x^3 - 2x^2 + 5 = 3A_0 x^3 + 3(A_1 + A_0) x^2 + (3A_2 + 2A_1) x + 3A_3 + A_2.$$

De aici rezultă sistemul

$$3A_0 = 1 \quad 3A_2 + 2A_1 = 0$$

$$3A_1 + 3A_0 = -2 \quad 3A_3 + A_2 = 5$$

cu soluția:

$$A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = \frac{2}{3} \quad \text{și} \quad A_3 = \frac{13}{9}.$$

$$\text{Deci} \int (x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x} dx = \left( \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9} \right) e^{3x} + C.$$

*Observație.* Aceeași metodă e aplicabilă și la calcularea primitivelor funcțiilor  $g(x) = R_n(x) \cos \alpha x$  și  $h(x) = S_n(x) \sin \alpha x$ , cu  $R_n$  și  $S_n$  polinoame de gradul  $n$ .

### 5.9.3. Calculul primitivelor unor funcții raționale

*Definiție.* O funcție rațională  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *simp.ă* dacă are una din formele

$$1) f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$2) f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \quad A, a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \notin I$$

$$3) f(x) = \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad B, C, a, b, c \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad b^2 - 4ac < 0$$

*Definiție.* Un polinom de două variabile de gradul  $n$  este o funcție de forma

$$P(x, y) = \sum_{\substack{i, j=0 \\ i+j \leq n}} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Definiție.* Se numește *funcție rațională* de două variabile cînd a două polinoame de două variabile.

**Teorema de descompunere a unei funcții raționale în funcții raționale simple.**  
 Fie  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție rațională

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0, \quad \forall x \in I)$$

unde  $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$  sînt polinoame prime între ele.  
 Dacă  $Q(x)$  are factorizarea

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_q)^{\alpha_q} (x^2 + M_1x + N_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r}$$

atunci  $f$  se descompune în mod unic astfel

$$\begin{aligned} f(x) = & g(x) \div \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x - a_1} \div \dots + \\ & \frac{A_1^{(q)}}{(x - a_q)^{\alpha_q}} + \frac{A_2^{(q)}}{(x - a_q)^{\alpha_q - 1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_q}^{(q)}}{x - a_q} + \\ & + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{(x^2 + M_1x + N_1)^{\beta_1}} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2 + M_1x + N_1)^{\beta_1 - 1}} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)} + C_{\beta_1}^{(1)}}{x^2 + M_1x + N_1} + \\ & + \dots \div \frac{B_1^{(r)}x + C_1^{(r)}}{(x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r}} + \frac{B_2^{(r)}x + C_2^{(r)}}{(x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r - 1}} + \dots + \frac{B_{\beta_r}^{(r)} + C_{\beta_r}^{(r)}}{x^2 + M_r x + N_r} \end{aligned}$$

unde  $g(x)$  e un polinom cu coeficienți reali, constantele care apar sînt numere reale, iar  $M_k^2 - 4N_k < 0, k = 1, 2, \dots, r$ .

**Teoremă.** Calculul primitivei  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  se reduce la calculul unor primitive din funcții raționale simple

$$\int x^n dx, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \int \frac{dx}{(x - a)^n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a \in \mathbf{R} \quad \text{și}$$

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + Mx + N)^n} dx, \quad B, C, M, N \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad M^2 - 4N < 0.$$

*Exemple.* 1) Fie  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$ . Să se afle o primitivă a lui  $f$ .

Descompunem pe  $f(x)$  în funcții raționale simple astfel

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3 + 1} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x = (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + A + C \Leftrightarrow \\ &A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Așem deci descompunerea

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3 + 1} &= -\frac{1}{3(x + 1)} + \frac{1}{3} \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = -\frac{1}{3(x + 1)} + \frac{1}{6} \frac{2x - 1 + 3}{x^2 - x + 1} = \\ &= -\frac{1}{3(x + 1)} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\int \frac{x dx}{x^3 + 1} = -\frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \operatorname{ln} \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C,$$

$$b^2 - 4ac > 0,$$

$$3) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}} + C, \quad b^2 - 4ac < 0.$$

$$4) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{1}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \cdot \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} -$$

$$-\frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C.$$

$$5) \int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = -\frac{\alpha}{2a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} +$$

$$+\frac{2\beta a - \alpha b}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} + C.$$

#### 5.9.4. Metoda lui Ostogradschii pentru determinarea părții raționale a primitivei dintr-o funcție rațională

Fie  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $Q(x) \neq 0$ .

1) Derivăm pe  $Q(x)$  și găsim cel mai mare comun divizor al lui  $Q$  și  $Q'$ . Fie acesta  $D(x)$ .

2) Aflăm citul împărțirii lui  $Q(x)$  la  $D(x)$ . Fie acesta  $C(x)$ .

3) Construim un polinom  $\varphi(x)$ , cu coeficienți reali nedeterminați, având gradul cu o unitate mai mic decât gradul lui  $D(x)$ .

4) Construim un polinom  $\psi(x)$ , cu coeficienți reali nedeterminați, având gradul cu o unitate mai mic decât  $C(x)$ .

5) Construim egalitatea

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{\varphi(x)}{D(x)} + \int \frac{\psi(x)}{C(x)} dx, \quad x \in [a, b].$$

Derivind și folosind metoda coeficienților nedeterminați, determinăm polinoamele  $\varphi(x)$  și  $\psi(x)$ , deci și pe  $\frac{\varphi(x)}{D(x)}$  (partea rațională a primitivei) și pe  $\frac{\psi(x)}{C(x)}$ .

6) Calculăm apoi o primitivă a lui  $\frac{\psi(x)}{C(x)}$ .

*Exemplu.* Fie  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3(x+1)^2}$ ,  $x \in (2, +\infty)$ . Să se determine partea algebrică din primitiva lui  $f(x)$ . În acest caz avem  $P(x) = 1$ ;  $Q(x) = (x-2)^3(x+1)^2$ ;  $Q'(x) = (x-2)^2(x+1)(5x-1)$ ;  $Q(x), Q'(x) = (x-2)^2(x+1) = D(x)$ ; citul împărțirii lui  $Q(x)$  la  $D(x)$  este  $C(x) = (x-2)(x+1)$

Deci:

$$1) D(x) = (x-2)^2(x+1).$$

$$2) C(x) = (x-2)(x+1).$$

$$3) \varphi(x) = ax^2 + bx + c.$$

$$4) \psi(x) = a_1x + b_1.$$

$$5) \int \frac{dx}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-2)^2(x+1)} + \int \frac{a_1x + b_1}{(x-2)(x+1)} dx.$$

Derivăm:

$$\frac{1}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{(x^2 - x - 2)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)3x}{(x-2)^3(x+1)^2} + \frac{a_1x + b_1}{(x-2)(x+1)},$$

și deducem

$$1 = a_1x^4 + (b_1 - a - 3a_1)x^3 + (-2a - 2b - 3b_1)x^2 + x(-4a - b - 3c + 4a_1) + (-2b + 4b_1),$$

de unde sistemul:

$$a_1 = 0;$$

$$b_1 - a - 3a_1 = 0,$$

$$-2a - 2b - 3b_1 = 0,$$

$$-4a - b - 3c + 4a_1 = 0,$$

$$-2b + 4b_1 = 1,$$

cu soluția:  $a = \frac{1}{9}$ ,  $b = -\frac{5}{18}$ ,  $c = -\frac{1}{18}$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = \frac{1}{9}$ .

Egalitatea de la 5) devine

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 5x - 1}{18(x-2)^2(x+1)} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(x-2)(x+1)} + C,$$

iar partea algebrică din primitivă este  $\frac{\varphi(x)}{D(x)} = \frac{2x^2 - 5x - 1}{18(x-2)^2(x+1)}$ .

O primitivă pentru  $\frac{1}{(x-2)(x+1)}$  este  $\frac{1}{3} \ln \left( \frac{x-2}{x+1} \right)$ ,  $x > 2$ , și astfel am obținut chiar o primitivă pentru  $f(x)$ .



5.9.5. Substituții și formule utilizate pentru reducerea calculării primitivelor unor funcții la calcularea primitivelor din funcții raționale

Nr. crt.	Primitiva	Substituția. Formule
1	$\int R^1 \left( x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$	$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
2	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	i) Pentru $a \geq 0$ , $t \pm x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ ii) Pentru $c \geq 0$ , $tx \pm \sqrt{c} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ iii) Pentru $b^2 - 4ac \geq 0$ , $t(x-x_1) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ , $x_1$ fiind o rădăcină a ecuației $ax^2+bx+c=0$
3	$\int R(e^{ax}) dx$	$t = e^{ax}$ , $a \neq 0$ , $a \in \mathbb{R}$
4	$\int R(\operatorname{tg} x) dx$	$t = \operatorname{tg} x$ , $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$ , $dx = \frac{dt}{1+t^2}$
5	$\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$ , $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ , $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\frac{x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$
6	$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$	$x = a \sin t$ sau $x = a \cos t$
7	$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$	$x = a \operatorname{tg} t$ sau $x = a \operatorname{cotg} t$ sau $x = a \operatorname{sh} t$
8	$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$	$x = \frac{a}{\sin t}$ sau $x = \frac{a}{\cos t}$ sau $x = a \operatorname{ch} t$
9	$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	$t = \frac{1}{x-\alpha}$

<sup>1)</sup> Cu  $R(\alpha)$  și  $R(\alpha, \beta)$  am notat funcții raționale de un argument, respectiv de două argumente. A se vedea definițiile de la pagina 407.

Exemple. 1) Să se afle o primitivă pentru  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}}$

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ . Observăm că  $f(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = f(u(x))$  cu  $u(x) = \frac{1}{x}$ . Dacă luăm  $t = \frac{1}{x}$  sîntem exact în condițiile metodei 3) și avem

$$\int f(t) v'(t) dt = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}$$

Cum  $1+t+t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ , aplicăm formula 17 din tabela 5.3 și avem

$$F(t) = - \ln \left( t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right),$$

respectiv

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = - \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \sqrt{1+x+x^2} \right) + C$$

2) Să se afle o primitivă pentru  $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x^2}}$ ,  $x \in (0, 1)$ . Aici  $ax^2 + bx + c = -x^2 + x$  și avem cel de al trei-lea caz al lui Euler (tabela de la 5.9.5, cazul 2, iii)

Luăm  $x_1 = 0$  și introducem funcția  $t$  definită de  $\sqrt{x-x^2} = tx$ , care ne dă  $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ,  $t: (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ , funcție strict descrescătoare, derivabilă, avînd inversa  $x = v(t)$ , cu  $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $v: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ , cu  $v'(t)$  continuă.

$$\text{Acum } f(t) v'(t) = \frac{1}{\frac{t^2+2}{t^2+1} \cdot \frac{t}{t^2+1}} \cdot \frac{-2t}{(t^2+1)^2} = -2 \frac{1}{t^2+2}.$$

O primitivă a acestei funcții este  $F(t) = -\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{\sqrt{2}}$ , iar o primitivă a funcției date este

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-x^2}} = -\sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-x}{2x}}.$$

3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| + C$ ,  $a > 0$ ,

- 4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, a < 0.$
- 5)  $\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\alpha}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2\beta a - \alpha b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + C.$
- 6)  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{a}} \times$   
 $\times \ln |2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}| + C, a > 0.$
- 7)  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} +$   
 $+ \frac{b^2 - 4ac}{8a\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, a < 0.$

## 5.10. Funcții integrabile

### 5.10.1. Integrala Riemann

1. *Definiție.* Fie  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  un interval compact. Se numește *diviziune* a acestui interval și se notează cu  $\delta$  o mulțime finită  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de puncte din  $[a, b]$ , astfel încât  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Mulțimea diviziunilor intervalului compact  $[a, b]$  o notăm cu  $\Delta$ .

2. *Definiție.* Se numește *normă* a diviziunii  $\delta$  și se notează cu  $\nu(\delta)$  cea mai mare dintre lungimile intervalelor parțiale  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ .

3. *Definiție.* Se numește *mulțime de puncte intermediare* asociată diviziunii  $\delta$  și se notează cu  $\xi$  o mulțime de  $n$  puncte  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ , având proprietatea  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

4. *Definiție.* Fie  $[a, b]$  un interval compact al axei reale,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție,  $\delta$  o diviziune a lui  $[a, b]$  și  $\xi$  o mulțime de puncte intermediare asociată lui  $\delta$ . Se numește *sumă Riemann*, corespunzătoare funcției  $f$ , diviziunii  $\delta$  și mulțimii  $\xi$  de puncte intermediare și se notează cu  $\sigma_f(\delta, \xi)$  numărul

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

5. *Definiție.* Funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *integrabilă* (în sensul lui) Riemann pe  $[a, b]$ , dacă  $\exists A \in \mathbf{R}$ , cu proprietățile:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) = \eta$ , astfel încât pentru orice diviziune  $\delta$  a lui  $[a, b]$ , cu  $\nu(\delta) < \eta$  și pentru orice mulțime de puncte intermediare  $\xi$ , asociată lui  $\delta$ , să avem

$$|\sigma_f(\delta, \xi) - A| < \varepsilon$$

sau

$$\lim_{\nu(\delta) \rightarrow 0} \sigma_f(\delta, \xi) = A,$$

oricare ar fi diviziunea  $\delta$  din mulțimea diviziunilor  $\Delta$  ale intervalului  $[a, b]$  și oricare ar fi mulțimea  $\xi$  de puncte intermediare asociată lui  $\delta$ .

6. *Definiție.* Numărul  $A$  se numește *integrala definită* (în sensul lui) Riemann a funcției  $f$  pe  $[a, b]$  și se notează

$$\int_a^b f, \int_a^b f dx \text{ sau } \int_a^b f(x) dx.$$

## 5.10.2. Proprietăți ale integralei definite

- 1) Orice funcție monotonă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este integrabilă.
- 2) Orice funcție continuă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este integrabilă.
- 3) Orice funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  integrabilă este mărginită pe  $[a, b]$ .
- 4) Dacă  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$  și continuă pe  $[a, b]$ , excepție făcând un număr finit de puncte din  $[a, b]$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .
- 5) Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sînt două funcții cu proprietățile:  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $g(x) = f(x)$  pe  $[a, b] \setminus A$  unde  $A$  este o parte finită inclusă în  $[a, b]$ , atunci
  - a)  $g(x)$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și

$$\beta) \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

- 6) Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sînt funcții integrabile, iar  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  atunci  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă și

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx,$$

- 7) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  și restricțiile lui  $f$  la  $[a, c]$ , respectiv  $[c, b]$ ,  $a < c < b$  sînt integrabile, atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx,$$

*Exemplu.* Fie  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$  Funcția  $f$  este integrabilă. În adevăr funcțiile  $f_1(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$  și  $f_2(x) = x^2 + 1$ ,  $x \in [1, 2]$  sînt integrabile și  $f$  diferă pe  $[1, 2]$  de  $f_2$  într-un singur punct. Deci  $f$  este integrabilă și

$$\int_0^2 f(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx + \int_1^2 (x^2 + 1) \, dx = 23/6.$$

- 8) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă, atunci avem

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

- 9) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$  este integrabilă, cu valori pozitive, atunci
 
$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

- 10) Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$  este o funcție continuă, iar  $[c, d] \subset [a, b]$ , atunci avem

$$\int_c^d f(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx.$$

- 11) Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sînt două funcții integrabile cu proprietatea  $g(x) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , atunci avem

$$\int_a^b g(x) \, dx \geq \int_a^b f(x) \, dx,$$

12) Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este integrabilă și  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$  atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

13) Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă și  $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o primitivă a lui  $f$  care se anulează în  $x_0 \in [a, b]$ , atunci  $F$  are forma

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx, \forall x \in [a, b].$$

14) *Teorema de medie.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă, atunci există  $c \in [a, b]$  cu proprietatea

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

Dacă  $f$  este continuă pe  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , iar  $g$  este pozitivă și integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci există  $\xi \in (a, b)$ , astfel încît

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

15) *Formula de integrare prin părți.* Dacă  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sînt funcții de clasa  $C^1$ , atunci avem

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

16) *Formula lui Leibniz-Newton.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție integrabilă, care admite primitive pe  $[a, b]$ , atunci pentru orice primitivă  $F$  a lui  $f$  are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

17) *Formula de schimbare de variabilă.* Dacă  $u: [a, b] \rightarrow I$  și  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $u$  de clasă  $C^1$  și  $f$  continuă, atunci

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

18) Există funcții integrabile care nu admit primitive și există funcții care admit primitive dar nu sînt integrabile.

*Exemple.* 1) Funcția  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$  este integrabilă, dar nu admite primitive fiindcă nu are proprietatea lui Darboux:  $f([0, 1]) = \{0, 1\}$  nu este interval.

2) Fie  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

Funcția  $f'$ , derivata lui  $f$ , admite ca primitivă pe  $f$ . În schimb  $f'$  nu este integrabilă deoarece funcțiile integrabile sînt mărginite, iar  $f'$  nu este mărginită  $\left(f' \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right) = -2\sqrt{\pi n} \rightarrow -\infty\right)$ .

19) *Formula lui Leibniz*. Fie  $[a, b]$  și  $[c, d]$  două intervale compacte ale axei reale,  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă și cu derivata parțială în raport cu  $x$  continuă și  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  două funcții continue și cu  $\alpha'(x)$ ,  $\beta'(x)$  continue pe  $[a, b]$ . Atunci funcția

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt,$$

este derivabilă pe  $[a, b]$  și are loc relația

$$F'(x) = f(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt.$$

### Tabela 5.4. Cîteva integrale definite

$$1) \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{dacă } m \neq n, m \text{ și } n \text{ sînt numere întregi pozitive} \\ \frac{\pi}{2} & \text{dacă } m = n \end{cases}$$

$$2) \int_0^{2\pi} x \sin x dx = -2\pi; \quad 3) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4};$$

$$4) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/16$$

$$5) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \quad (n > 0, \text{ întreg})$$

$$6) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n > 0, \text{ întreg})$$

$$7) \int_0^{\sqrt{a/b}} \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}};$$

$$8) \int_0^{\pi} \ln(1-2a \cos x + a^2) dx = \begin{cases} 0 & (0 < a \leq 1); \\ 2\pi \ln a & (a > 1) \end{cases}$$

$$9) \int_0^{\pi} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\pi} \ln \sin x \, dx = -\pi \ln 2.$$

$$10) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \quad 11) \int_0^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \frac{\pi}{2} \quad m \in \mathbf{N}^*$$

### 5.10.3. Aplicații ale integralei definite

1) *Determinarea ariilor figurilor plane.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$  este o funcție continuă, atunci subgraficul lui  $f$  are aria

$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

2) Dacă  $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sînt două funcții continue și  $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a, b]$ , atunci porțiunea de plan cuprinsă între graficele celor două funcții și dreptele de ecuații  $x = a$  și  $x = b$  are aria

$$A = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \, dx$$

3) *Determinarea volumului corpurilor de rotație.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție continuă, pozitivă, atunci corpul de rotație generat de  $f$  are volumul

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

4) *Determinarea lungimii graficului unei funcții.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție de clasă  $C^1$ , atunci graficul lui  $f$  are lungimea

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx.$$

5) *Determinarea ariei suprafețelor de rotație.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție de clasă  $C^1$ , pozitivă, atunci suprafața de rotație generată de  $f$  are aria

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

6) *Determinarea coordonatelor  $\xi$  și  $\eta$  ale centrului de greutate.* Fie  $G(\xi, \eta)$  centrul de greutate al unei plăci plane omogene mărginite pe graficele funcțiilor continue  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ( $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ ) și de dreptele de ecuații  $x = a, x = b$ . Atunci avem

$$\xi = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx}; \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) \, dx}{\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx}$$

Rezultă imediat un caz particular interesant cînd  $f = 0$ .

7) *Determinarea momentului de inerție al unui corp de rotație omogen față de axa de rotație*

Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$  este o funcție continuă, atunci corpul omogen de rotație (față de  $Ox$ ) generat de  $f$  are momentul de inerție față de axa de rotație

$$I = \frac{\pi\mu}{2} \int_a^b f^4(x) dx,$$

unde  $\mu$  este densitatea constantă a corpului respectiv.

8) Determinarea momentului de inerție al unei plăci plane omogene limitate de graficele funcțiilor continue  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , și de drepte de ecuații  $x = a$ ,  $x = b$ , față de axa absciselor, se efectuează cu formula

$$I = \frac{\mu}{3} \int_a^b (g^3(x) - f^3(x)) dx,$$

unde  $\mu$  este densitatea constantă a plăcii respective.

9) Calcularea limitelor unor șiruri numerice.

a) Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție integrabilă, atunci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

b) Dacă  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție integrabilă, atunci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

#### 5.10.4. Integrarea numerică a funcțiilor

1) *Formula dreptunghiurilor.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție de clasă  $C^1$ ,  $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  și

$$S_n = \frac{b-a}{n} [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

respectiv

$$S'_n = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(b)],$$

atunci  $S_n$  sau  $S'_n$  aproximează integrala definită  $\int_a^b f(x) dx$ , cu o eroare cel

mult egală cu  $\frac{(b-a)^2 M'}{n}$ , unde  $M' = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .

*Exemplu.* Să se calculeze  $I = \int_1^9 \sqrt{6x-5} dx$ , divizând intervalul  $[1, 9]$  în 8 părți egale. Să se indice eroarea absolută și cea relativă.



În acest caz (fig. 5.26) avem  $a = x_0 = 1$ ,  $x_8 = b = 9$ ,  $h = \frac{(b-a)}{8} = 1$ .  
 $x_1 = 2, \dots, x_7 = 8$ . Calculăm valorile lui  $f$  în punctele de diviziune:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2,6458	3,6056	4,3589	5	5,5678	6,0828	6,5574	7

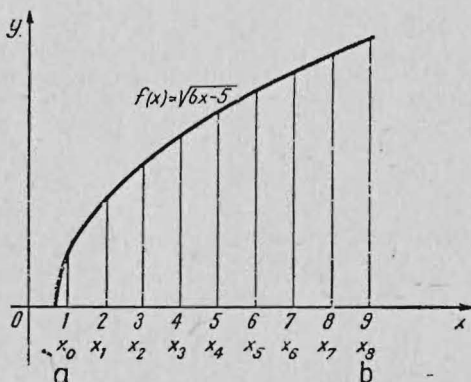


Fig. 5.26

Cu formula ce dă pe  $S_n$  găsim  $I \simeq S = 34,8183$ .

Valoarea exactă a lui  $I$  se găsește imediat  $I = 38$ .

Acum eroarea absolută este  $\epsilon_a = I - S_n = 3,1817$ , iar cea relativă

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_a}{38} \cdot 100 = 8,37\%.$$

2) *Formula trapezelor.* Dacă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  este o funcție de clasă  $C^2$ ,  
 $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  și

$$S_n = \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + f(b)],$$

atunci  $S_n$  aproximează integrala definită  $\int_a^b f(x) dx$  cu o eroare cel mult egală  
 cu  $\frac{(b-a)^3 M''}{12 n^2}$ , unde  $M'' = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ .

*Exemplu.* Valoarea lui  $I$  calculată cu această metodă se găsește a fi  
 $I \simeq 37,8183$ , eroarea absolută  $\epsilon_a = 0,1817$  și eroarea relativă  $\epsilon_r = 0,48\%$ .

## 5.11. Ecuații diferențiale

*Definiție.* Se numește *ecuație diferențială ordinară* (sau obișnuită) cu o funcție necunoscută  $y$  o relație de forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0, \quad (1)$$

sau de forma

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

intre variabila independentă  $x$ , funcția necunoscută  $y(x)$  și derivatele acesteia pînă la un anumit ordin  $n$ , unde  $F: \Delta \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  respectiv  $f: J \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sînt funcții continue.

*Observație:* Cu  $I, J$  notăm intervale ale axei reale, ca de obicei.

*Exemple de ecuații diferențiale:*  $y'(x) - y(x) = 0$ ;  $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ ;  
 $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ ;  $y'' - 3y' + y = 0$ ;  $(x+2)y'' - (x-5)y' - 7y = 0$ .

*Definiție.* Se numește *ordin al ecuației diferențiale* (1) sau (2) *ordinul cel mai înalt al derivatei lui  $y$  care intră în ecuație.*

*Exemple.* Ecuația diferențială  $y' - y = 0$  este de ordinul întâi, iar ecuația  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$  este de ordinul al doilea.

*Definiție.* Se numește *soluție* a ecuației (2) o funcție  $\varphi: I \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ , cu derivatele  $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$  continue pe  $I$ , care înlocuiește în relația (2) o transformă pe aceasta într-o identitate în  $x \in I$ :

$$\forall x \in I, \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

*Exemplu.* Funcția  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = e^x$  este soluție a ecuației diferențiale  $y' - y = 0$ , fiindcă înlocuiește în ecuație ne dă  $e^x - e^x = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

*Problema lui Cauchy pentru ecuația (2):* A rezolva problema lui Cauchy pentru ecuația (2) înseamnă a determina o soluție  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  a ecuației, care îndeplinește condițiile (inițiale)

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= y_0 \\ \varphi'(x_0) &= y'_0, \quad x_0 \in J, (y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

*Exemplu de problemă Cauchy.* Să se determine o soluție  $\varphi: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  a ecuației  $y'(x) - y(x) = 0$ , care îndeplinește condiția:

$$y(2) = 2. \text{ Se găsește } \varphi(x) = 2e^{x-2}, \varphi: [1, 3] \rightarrow [2e^{-1}, 2e].$$

*Observație:* În rezolvarea problemelor lui Cauchy pentru o ecuație diferențială fundamentală sînt următoarele chestiuni;

- 1) Demonstrarea existenței locale sau globale a soluției;
- 2) Determinarea intervalului pe care există soluția.
- 3) Demonstrarea unicității soluției.
- 4) Dependența soluției de condițiile inițiale.

Pentru ecuațiile diferențiale elementare considerate în cele ce urmează mai jos, aceste chestiuni se rezolvă ușor (constructiv), pe baza cunoștințelor de analiză matematică dobîndite în liceu.

### 5.11.1. Cîteva tipuri de ecuații diferențiale elementare

1.  $y'(x) = f(x)$ ,  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval,  $f$  continuă.
2.  $y'(x) = f(x)y(x)$ ,  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă (ecuație liniară).
3.  $y'(x) = ay(x) + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  (ecuație afină cu coeficienți constanți).
4.  $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ ,  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continuă,  $g: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall y \in J$ ,  $g(y) \neq 0$ ,  $g$  continuă (ecuație cu variabilele separabile).
5.  $a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$ ,  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  (ecuație liniară de ordinul al II-lea cu coeficienți constanți).

### 5.11.2. Mulțimea soluțiilor unor ecuații diferențiale și soluția problemei lui Cauchy pentru aceste ecuații

Nr. crt.	Tipul ecuației	Ecuația diferențială	Mulțimea soluțiilor sau soluția generală	Datele inițiale	Soluția problemei Cauchy
1	Ecuația cu variabilele separate	$y' = f(x), f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $f$ continuă	$y(x) = \int f(x) dx + C, x \in I,$ $C \in \mathbb{R}$	$y(x_0) = y_0$ $x_0 \in I,$ $y_0 \in \mathbb{R}$	$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt,$ $x \in I$
		<i>Exemplu.</i> $y' = \sin x$ $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	$y(x) = -\cos x + C,$ $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$	$y(0) = 1$	$\varphi(x) = 2 - \cos x, x \in \mathbb{R}$
2	Ecuație cu variabilele separabile	$y' = g(y), g: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $g$ continuă	$\int \frac{dy}{g(y)} - x = C, x \in I$ $C \in \mathbb{R}$	$y(x_0) = y_0$ $x_0 \in I,$ $y_0 \in J$	$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}, y: I \rightarrow J$
		<i>Exemplu.</i> $y' = 1 + y^2$ $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\arctg y(x) = x + C, x \in I$ $C \in \mathbb{R}$	$y(0) = 0$	$\varphi(x) = \text{tang } x,$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
3	Ecuație cu variabilele separabile	$y' = f(x) \cdot g(y), f: I \rightarrow \mathbb{R},$ $g: J \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$ continuă	$\int f(x) dx + C = \int \frac{dy}{g(y)},$ $x \in I_1 \subset I, y \in J; C \in \mathbb{R}$	$y(x_0) = y_0$ $x_0 \in I,$ $y_0 \in J,$	$\int_{x_0}^x f(t) dt =$ $= \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)}, x \in I_1 \subset I, y \in J$

		<p><i>Exemplu.</i> <math>y' = -\frac{1+y^2}{y} \sin x</math></p> <p><math>g(y) = \frac{1+y^2}{y}</math>,</p> <p><math>g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}</math></p> <p><math>f(x) = -\sin x</math>,</p> <p><math>f : I \rightarrow [-1, 1]</math></p>	$\ln(1+y^2) = 2 \cos x + C$	$y(0) = 1$	$\varphi(x) = \sqrt{2 \cdot e^{2 \cos x} - 2} - 1$ $ x  \leq 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}\right)$
4	Ecuatie liniară	$y' + P(x)y = 0$ , $P : I \rightarrow \mathbf{R}$ , continuă	$y(x) = C \cdot e^{-\int P(x) dx}$ , $x \in I$ , $C \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$ , $x_0 \in I$ , $y_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = y(x_0) e^{-\int_{x_0}^x P(s) ds}$ , $x \in I$
		<p><i>Exemplu.</i> <math>y' + \frac{1}{x-2}y = 0</math>,</p> <p><math>x \in (2, +\infty)</math></p>	$y(x-2) = C$	$x_0 = 3$ ; $y_0 = 5$	$\varphi(x) = \frac{5}{x-2}$ , $x \in (2, +\infty)$
5	Ecuatie afină cu coeficienți constanți	$y' = ay + b$ , $a, b \in \mathbf{R}$ , $a \neq 0$ $y : I \rightarrow J$ ; $y \neq -\frac{b}{a}$ , $\forall x \in I$	$y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$ , $x \in I$ , $C \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$ , $x_0 \in I$ , $y_0 \in J$	$y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ , $y : I \rightarrow J$
		<p><i>Exemplu.</i> <math>y' = y - 2</math></p> <p><math>y : \mathbf{R} \rightarrow (2, +\infty)</math></p>	$y(x) = 2 + C e^x$	$y(0) = 3$	$\varphi(x) = 2 + e^x$ , $x \in \mathbf{R}$
6	Ecuatie de ordin superior normală	$y'' = f(x)$ , $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ , $f$ continuă	$y(x) = \int_{x_0}^x (x-t)f(t) dt +$ $+ C_1 x + C_2$ , $x, x_0 \in I$ , $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0$ , $y'(x_0) = y'_0$ , $x_0 \in I$ , $y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = \int_{x_0}^x (x-t)f(t) dt +$ $+ y'_0(x-x_0) + y_0$

Nr. crt.	Tipul ecuației	Ecuația diferențială	Mulțimea soluțiilor sau soluția generală	Datele inițiale	Soluția problemei Cauchy
		<i>Exemplu.</i> $y'' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\arcsin : (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$y(x) = \frac{2x^2 - 1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C_1 x + C_2, x \in (-1, 1); C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$	$\varphi(x) = \frac{2x^2 - 1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}, x \in (-1, 1)$
7	Ecuație diferențială a oscilațiilor armonice	$y'' + \omega^2 y = 0; y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  <i>Exemplu.</i> $y'' + 17y = 0$	$y(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x; C_1, C_2 \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$  $y(x) = C_1 \sin \sqrt{17} x + C_2 \cos \sqrt{17} x, x \in \mathbf{R}, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0,$ $y'(x_0) = y'_0,$ $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$  $x_0 = 0,$ $y_0 = 1,$ $y'_0 = \sqrt{17}$	$y(x) = y_0 \cos \omega(x - x_0) + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega(x - x_0), x \in \mathbf{R}$  $\varphi(x) = \cos \sqrt{17} x + \sin \sqrt{17} x, x \in \mathbf{R}$
8	Ecuație liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor distincte	$ay'' + by' + cy = 0$ $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; a, b, c \in \mathbf{R}$ $ar^2 + br + c = 0,$ $\Delta > 0; r_1 \neq r_2$  <i>Exemplu.</i> $3y'' - 2y' - 8y = 0$ $3r^2 - 2r - 8 = 0$ $r_1 = 2, r_2 = -4/3$	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, x \in \mathbf{R},$  $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}, x \in \mathbf{R}; C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0,$ $y'(x_0) = y'_0,$ $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$  $x_0 = 0,$ $y_0 = 1;$ $y'_0 = 0$	$y(x) = \frac{r_2 y_0 - y_0}{r_2 - r_1} e^{(x-x_0)r_1} + \frac{y'_0 - r_1 y_0}{r_2 - r_1} e^{(x-x_0)r_2}, x \in \mathbf{R}$  $\varphi(x) = \frac{2}{5} e^{2x} + \frac{5}{5} e^{-\frac{4}{3}x}, x \in \mathbf{R}$

9	<p>Ecuație liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor duble</p>	$ay'' + by' + c = 0;$ $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; a, b, c \in \mathbf{R}$ $ar^2 + br + c = 0$ , cu $\Delta = 0, r_1 = r_2 = r$	$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{rx},$ $x \in \mathbf{R}, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0,$ $y'(x_0) = y'_0,$ $x_0, y_0,$ $y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = [(y'_0 - r y_0) x + y_0 + r x_0 y_0 - x_0 y'_0] e^{r(x-x_0)}, x \in \mathbf{R}$
		<p>Exemplu. <math>y'' + 2y' + y = 0</math>  <math>r^2 + 2r + 1 = 0</math>  <math>r_1 = r_2 = -1</math></p>	$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{-x},$ $x \in \mathbf{R}, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$x_0 = 0,$ $y_0 = 0,$ $y'_0 = 1;$	$\varphi(x) = x e^{-x}, x \in \mathbf{R}$
10	<p>Ecuația liniară cu coeficienți constanți. Cazul rădăcinilor complexe</p>	$ay'' + by' + cy = 0.$ $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; a, b, c \in \mathbf{R}$ $ar^2 + br + c = 0, \Delta < 0;$ $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$	$y(x) = (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) \cdot e^{\alpha x}, x \in \mathbf{R}, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$y(x_0) = y_0,$ $y'(x_0) = y'_0,$ $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$	$y(x) = \left[ \frac{y'_0 - \alpha y_0}{\beta} \sin \beta(x - x_0) + y_0 \cos \beta(x - x_0) \right] e^{\alpha(x-x_0)}, x \in \mathbf{R}$
		<p>Exemplu. <math>y'' + 2y' + 2y = 0</math>  <math>r^2 + 2r + 2 = 0</math>  <math>r_1 = -1 + i, r_2 = -1 - i,</math>  <math>\alpha = -1; \beta = 1.</math></p>	$y(x) = e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ $x \in \mathbf{R}; C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$x_0 = 0,$ $y_0 = 1,$ $y'_0 = 0$	$\varphi(x) = (\sin x + \cos x) e^{-x}, x \in \mathbf{R}$

Tabela 5.7. Citeva integrale pe intervale necompacte:

$$1. \int_0^{\infty} \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \quad 2. \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \quad 3. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a < 0) \end{cases} \quad 5. \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \quad 7. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$8. \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad (0 < n < 1)$$

$$9. \int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$$

$$10. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pentru } a > b \\ 0 & \text{pentru } a = b \\ \frac{\pi}{4} & \text{pentru } a < b \end{cases}$$

$$11. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

## BIBLIOGRAFIE

1. Rogai, E., Teodorescu, C. Tabele matematice uzuale, Editura Tehnică, edițiile I—VIII.

2. *Manuale:* (Editura Didactică și Pedagogică).

*Clasa a IX-a*

a) Năstăsescu, C., Niță, C., Rizescu, Gh. *Algebră*, 1981.

b) Bogdanoff, Z., Georgescu-Buzău, E., Panaitopol, L. *Algebră*, 1977

c) Dumitrescu, Gh., *Algebră*, 1958.

d) Coța, A., Radó, M., Răduțiu, M., Vornicescu, Fl., *Geometrie și trigonometrie*, 1981.

e) Teleman, K., Florescu, M., Moraru, D., Rădulescu, C., Stătescu, E. *Geometrie și trigonometrie*, 1979.

f) Coșniță, C, Simionescu, Gh. D., *Geometrie*, 1964.

g) Constantinescu, L., Petrișor, Gr. *Geometrie și trigonometrie*, 1975

*Clasa a X-a*

a) Năstăsescu, C., Niță, C., Popa, S. *Algebră*, 1980

b) Bogdanoff, Z., Georgescu-Buzău, E. *Algebră*, 1978

c) Crișan, I., Pop, A. *Algebră*. 1963

- d) Teleman, K., Florescu, M., Moraru, D., Rădulescu, C., Stătescu, E. *Geometrie și trigonometrie*, 1980
- e) Mihăileanu, N. N., Ionescu-Bujor, C., Ionescu-Țiu, C. *Geometrie în spațiu*, 1976
- f) Dumitrescu, Gh. *Geometrie în spațiu*, 1963
- g) Coșniță, C. *Geometrie în spațiu*, 1963

#### Clasa a XI-a

- a) Năstăsescu, C., Nită, C., Stănescu, I. *Elemente de algebră superioară*, 1980
- b) Udriște, C., Tomuleanu, V. *Geometrie analitică*, 1981
- c) Simionescu, Gh. D. *Geometrie analitică*, 1978
- d) Gussi, Gh., Stănășilă, O., Stoica, T. *Elemente de analiză matematică*, 1980
- e) P. Proteasa, L. D. Șerbinași, *Matematică aplicată în tehnica de calcul*, 1980

#### Clasa a XII-a

- a) Ion, I. D., Ghicca, A., Nediță, N. *Algebră*, 1980
- b) Hollinger, A., Georgescu-Buzău, E. *Elemente de algebră superioară*, 1969
- c) Colojoară, I., Dragomir, A. *Elemente de algebră superioară*, 1968
- d) Boboc, N., Colojoară, I. *Elemente de analiză matematică*, 1980
- e) Acad. Caius Iacob. *Elemente de analiză matematică*, 1973
- f) Acad. Gheorghe Mihoc, *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică*, 1979
- g) Șchiop, A. I., Stancu, M. *Matematică aplicată în tehnica de calcul*, 1980

### 3. Alte lucrări fundamentale

- a) Bădulescu, V. *Tabele de logaritmi*, București, Ediția a III-a, 1944
- b) Cristescu, V. *Culegere de probleme de Trigonometrie*, Partea I, 1943
- c) Antoine Dalle, 2000 *théorèmes et problèmes de Géométrie avec solutions*, J. Gauthier, P. Paelinck, 1923, Namur
- d) J. Dupuis, *Tables de logarithmes à cinq décimales, disposées à double entrée et revues*, par J. Dupuis, Paris, Hachette, 1928
- e) J. Hadamard, *Lecții de geometrie elementară, Geometrie plană, geometrie în spațiu*, Editura Tehnică, 1960, 1961
- f) Ionescu, I. *Culegere de probleme de aritmetică*, Biblioteca „Gazetei Matematice” nr. XIII, 1937
- g) Acad. Grigore C. Moisil, *Elemente de logică matematică și de teoria mulțimilor*, Editura Științifică, 1968, București
- h) Myller, A. *Curs de geometrie analitică*, Ed. Pygmalion, Iași, 1946
- i) Acad. Octav Onicescu, Gheorghe Galbură, *Algebra*, 1948
- j) D. I. Perepiolkin, *Probleme rezolvate din „Lecții de geometrie în spațiu de J. Hadamard”*, Editura Tehnică, 1962
- k) Ionescu-Țiu, C., Mihăileanu, N. N., Pirșan, L., Rogai, E. *Probleme de matematică pentru examenle de bacalaureat și admitere în învățământul superior*, București, Editura Tehnică, două ediții, 1972, 1973
- l) Sirețchi, Gh. *Analiză matematică*, vol. I, ed. a IV-a, 1978, Universitatea București
- m) Stamate, I., Stoian, I. *Culegere de probleme de algebră*, 1971
- n) Teodorescu, I. St. *Metode de aritmetică*, 1937
- o) Acad. Vinogradov, I. M. *Bazele teoriei numerelor*, 1954, București



# CUPRINS

Prefață .....	3
<b>1. Aritmetica</b> .....	<b>5</b>
1.1. Sisteme de numerație.....	5
1.2. Teorema împărțirii întrégi.....	5
1.3. Divizibilitatea numerelor naturale.....	6
1.4. Criterii de divizibilitate a numerelor naturale scrise în baza 10	6
1.5. Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun	7
1.6. Numere prime .....	7
1.7. Teoreme de teoria numerelor.....	9
1.8. Ecuații remarcabile .....	10
1.9. Alte rezultate din aritmetică.....	10
1.10. Extragerea rădăcinii pătrate.....	10
1.11. Extragerea rădăcinii cubice.....	11
1.12. Folosirea tabelelor 1.1—1.5.....	12
Tabela 1.1. Puterile numerelor 2, 3 și 5.....	13
Tabela 1.2. Puterile 4 și 5 ale numerelor naturale de la 1 la 100	14
Tabela 1.3. Numerele prime de la 1 la 10 000.....	16
Tabela 1.4. Cei mai mici divizori ai numerelor de la 169 la 10 000	19
Tabela 1.5. Părți proporționale pentru interpolări liniare ale	22
numerelor de la 11 la 90.....	22
<b>2. Algebra</b> .....	<b>25</b>
2.1. Elemente de logică matematică.....	25
2.1.1. Noțiunea de propoziție .....	25
2.1.2. Conectori (operatori) logici.....	25
2.1.3. Expresii în calculul propozițiilor.....	27
2.1.4. Noțiunea de predicat.....	28
2.1.5. Cuantificatori .....	28
2.1.6. Metoda de demonstrație prin reducere la absurd.....	29
2.1.7. Proprietăți fundamentale ale conectorilor (operatorilor)	29
logici .....	29
2.2. Mulțimi .....	29
2.3. Relații binare.....	32
2.4. Operații cu numere reale.....	34
2.4.1. Puteri naturale ale numerelor reale.....	34
2.4.2. Identități fundamentale.....	34
2.4.3. Radicali, Proprietăți .....	35
2.5. Ecuații și inecuații de gradul întâi.....	36
2.5.1. Ecuații de gradul întâi sau ecuații afine.....	36
2.5.2. Inecuații de gradul întâi sau inecuații afine.....	37
2.5.3. Modulul unui număr real $x$ .....	37
2.6. Numere complexe .....	38
2.6.1. Forma algebrică a numerelor complexe.....	38
2.6.2. Forma trigonometrică a numerelor complexe.....	39
2.6.3. Formula lui Moivre .....	40
2.6.4. Extragerea rădăcinii de ordinul $n$ dintr-un număr complex	40
2.6.5. Forma exponențială a numerelor complexe.....	40
2.6.6. Ecuația binomă .....	41
2.7. Ecuații și inecuații de gradul al II-lea.....	41
2.7.1. Ecuații de gradul al doilea.....	41
2.7.2. Inecuații fundamentale de gradul al II-lea.....	45
2.8. Ecuații algebrice de gradul III, IV și V .....	46
2.8.1. Rezolvarea ecuației de gradul al treilea.....	46
2.8.2. Ecuația reciprocă de gradul al treilea.....	48
2.8.3. Rezolvarea ecuației de gradul al patrulea.....	48

2.8.4. Ecuația reciprocă de gradul al patrulea.....	49
2.8.5. Ecuația bipătrată .....	49
2.8.6. Ecuația reciprocă de gradul al cincilea .....	49
2.9. Logaritmi .....	49
2.9.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale.....	50
2.9.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale.....	51
2.10. Metoda inducției matematice .....	51
2.10.1. Axioma de recurență a lui Peano.....	51
2.10.2. Metoda inducției matematice.....	51
2.10.3. Variantă a metodei inducției matematice .....	52
2.11. Progresii aritmetice .....	54
2.11.1. Reprezentarea unei progresii aritmetice cu $n$ termeni	55
2.11.2. Progresii armonice .....	55
2.12. Progresii geometrice .....	55
2.12.1. Reprezentarea unei progresii geometrice cu $n$ termeni	57
2.13. Analiză combinatorie .....	58
2.13.1. Permutări.....	58
2.13.2. Aranjamente.....	59
2.13.3. Combinări .....	59
2.13.4. Binomul lui Newton.....	60
2.13.5. Suma puterilor asemenea ale primelor $n$ numere naturale	61
2.14. Matrice .....	61
2.14.1. Matrice. ....	61
2.15. Determinanți .....	56
2.16. Sisteme de ecuații afine (liniare și neomogene) .....	70
2.17. Polinoame .....	75
2.17.1. Polinoame cu coeficienți complexi .....	75
2.17.1.1. Divizibilitatea polinoamelor.....	76
2.17.1.2. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor....	77
2.17.1.3. Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor....	78
2.17.1.4. Rădăcinile polinoamelor .....	78
2.17.1.5. Rădăcini comune la două polinoame. Rezultant	79
2.17.1.6. Polinoame ireductibile .....	79
2.17.1.7. Ecuații algebrice .....	89
2.17.1.8. Formula lui Taylor și Mac-Laurin pentru polinoame	80
2.17.2. Polinoame cu coeficienți reali. Ecuații algebrice .....	81
2.17.3. Polinoame cu coeficienți raționali. Ecuații algebrice..	81
2.17.4. Polinoame cu coeficienți întregi.....	82
2.17.5. Aproximarea rădăcinilor iraționale ale polinoamelor	
$f \in \mathbb{R}[X]$ .....	82
2.18. Structuri algebrice .....	83
2.18.1. Lege de compoziție internă.....	83
2.18.2. Grupuri .....	84
2.18.3. Inele .....	85
2.18.4. Corpuri .....	86
2.18.5. Morfisme (omomorfisme) .....	87
2.18.6. Izomorfism .....	87
2.18.7. Automorfisme .....	88
2.18.8. Endomorfisme .....	88
2.19. Spațiu vectorial .....	88
2.19.1. Lege de compoziție externă.....	88
2.19.2. Spațiu vectorial.....	89
2.19.3. Bază. Dependență și independență liniară .....	89
2.19.4. Transformări liniare .....	90
Tabela 2.1. Coeficienți binomiali.....	95

2.20. Folosirea tabelelor 2.1—2.9 .....	93
Tabela 2.2. Logaritmi zecimali ai numerelor de la 1 la 100 .....	96
Tabela 2.3. Logaritmi zecimali ai numerelor de la 100 la 10 000 .....	97
Tabela 2.4. Antilogaritmi .....	119
Tabela 2.5. Logaritmi naturali ai numerelor de la 1,00 la 9,99 .....	122
Tabela 2.6. Logaritmi naturali ai puterilor lui 10 .....	124
Tabela 2.7. Multiplii lui $\frac{1}{M}$ .....	124
Tabela 2.8. Multiplii modului $M$ .....	125
Tabela 2.9. Valorile funcțiilor $e^x$ și $e^{-x}$ pentru $x \in (0,10)$ .....	126
3. Geometrie .....	130
3.1. Geometrie plană .....	130
3.1.1. Teoreme și relații în triunghiuri, patrulatere și poligoane oarecare .....	130
3.1.2. Teoreme remarcabile .....	132
3.1.3. Cercul .....	137
3.1.4. Locuri geometrice fundamentale .....	138
3.1.5. Relații în poligoane regulate înscrise într-un cerc .....	139
3.1.6. Folosirea tabelor 3.1—3.3 .....	139
Tabela 3.1. Laturile, apotemele și ariile poligoanelor regulate în funcție de raza $R$ a cercului circumscris .....	140
Tabela 3.2. Puteri, radicali, logaritmi naturali, valori reciproce, lungimi și arii de cercuri .....	141
Tabela 3.3. Valori numerice importante (expresii în $\pi$ , $g$ și $e$ ) .....	171
3.2. Geometria în spațiu .....	172
3.2.1. Teoreme remarcabile .....	172
3.2.2. Locuri geometrice fundamentale .....	173
3.2.3. Ariile și volumele principalelor poliedre. Razele sferelor înscrise sau circumscrise acestora .....	174
3.2.4. Ariile și volumele principalelor corpuri rotunde .....	177
3.2.5. Poliedre. Poliedre regulate .....	179
3.2.6. Cîteva volume uzuale .....	181
3.2.7. Folosirea tabelii 3.4. ....	182
Tabela 3.4. Factorul corespunzător raportului $h/d$ pentru calculul conținutului de lichid în cilindri orizontali .....	182
3.3. Geometrie analitică .....	183
3.3.1. Vectori .....	183
3.3.2. Transformări geometrice în plan .....	186
3.3.3. Transformări geometrice în spațiu .....	191
3.3.4. Punctul și dreapta. Planul .....	192
3.3.5. Cercul .....	197
3.3.6. Elipsa .....	198
3.3.7. Hiperbola .....	200
3.3.8. Parabola .....	202
3.3.9. Curbele reprezentate de ecuația $y^2 = 2px + qx^2$ .....	203
3.3.10. Secțiuni conice .....	204
4. Trigonometrie .....	205
4.1.1. Unități de măsură pentru unghiuri. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani .....	205
Tabela 4.1. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani .....	206
4.2. Definiția funcțiilor trigonometrice ale unui unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic .....	207
4.3. Definiția funcțiilor trigonometrice pentru unghiuri oarecare și argumente numerice .....	207
4.4. Perioadicitatea funcțiilor trigonometrice fundamentale .....	208

4.5. Graficele funcțiilor trigonometrice fundamentale.....	208
4.6. Identități trigonometrice fundamentale.....	210
4.7. Continuitatea și derivabilitatea funcțiilor trigonometrice ....	210
4.8. Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice fundamentale....	210
4.9. Formule de reducere la un unghi ascuțit .....	211
4.10. Expresiile funcțiilor $\sin^2 u$ , $\cos^2 u$ , $\operatorname{tg}^2 u$ și $\operatorname{cotg}^2 u$ în funcție de pătratul unei funcții trigonometrice fundamentale.....	211
Tabela 4.2. Valorile funcțiilor trigonometrice fundamentale ale citorva unghiuri.....	212
Tabela 4.3. Funcțiile trigonometrice exprimate cu ajutorul uneia dintre ele .....	213
Tabela 4.4. Funcțiile trigonometrice fundamentale ale unor sume și diferențe de unghiuri.....	214
Tabela 4.5. Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice fundamentale în sume de funcții trigonometrice corespunzătoare .....	214
4.11. Funcțiile trigonometrice ale jumătății, dublului și triplului unui unghi .....	215
4.12. Linearizarea unor puteri ale sinusului și cosinusului .....	216
4.13. Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul tangentei jumătății unghiului.....	216
4.14. Formule de transformare a unor sume de funcții trigonometrice în produse (Formule calculabile prin logaritmi).....	217
4.15. Identități pentru funcțiile trigonometrice ale unghiurilor $A$ , $B$ , $C$ ale unui triunghi oarecare.....	217
4.16. Inegalități verificate de funcțiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi oarecare și de alte elemente ale acestuia.....	218
4.17. Relații între elementele unui triunghi oarecare.....	219
Tabela 4.6. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.....	221
Tabela 4.7. Rezolvarea triunghiurilor oarecare.....	221
4.18. Produse. Sume. Inegalități și identități remarcabile.....	222
4.19. Funcții trigonometrice inverse.....	224
4.20. Condiții necesare și suficiente ca valorile funcțiilor trigonometrice corespunzătoare la două unghiuri $u$ și $v$ să fie egale.....	225
Tabela 4.8. Ecuații trigonometrice fundamentale.....	226
4.21. Inecuații trigonometrice fundamentale .....	228
4.22. Aplicații ale trigonometriei.....	233
4.23. Formule fundamentale pentru funcțiile hiperbolice.....	235
Tabela 4.9. Relații între funcțiile hiperbolice.....	236
4.24. Folosirea tabelii 4.10 și a tabelii 4.11.....	238
Tabela 4.10. Valorile naturale ale funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor măsurate în grade sexagesimale.....	240
Tabela 4.11. Logaritmi cu cinci zecimale ai funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la $0^\circ$ până la $90^\circ$ din minut în minut .....	244
5. Analiză matematică .....	342
5.1. Numere reale* .....	342
5.1.1. Submulțimi ale lui $\mathbf{R}$ .....	343
5.1.2. Proprietăți ale numerelor reale, deduse din axiome ....	343
5.1.3. Dreapta încheiată .....	344
5.1.4. Intervaie numerice .....	345
5.1.5. Vecinătate. Punct de acumulare.....	345
5.1.6. Mulțimi mărginite ale lui $\mathbf{R}$ . Margine superioară. Margine inferioară .....	346
5.2. Inegalități remarcabile .....	346
5.3. Șiruri de numere reale.....	350

5.3.1. Teoreme fundamentale asupra șirurilor numerice.....	351
5.3.2. Șiruri remarcabile .....	354
5.3.3. Limite fundamentale de șiruri .....	355
5.3.4. Șiruri recurente liniare.....	356
5.4. Serii de numere reale.....	357
5.4.1. Alte serii remarcabile.....	358
5.5. Noțiunea de funcție.....	359
5.5.1. Generalități .....	359
5.5.2. Funcții elementare .....	365
5.6. Limite de funcții .....	372
5.6.1. Definiții .....	372
5.6.2. Proprietăți .....	373
5.6.3. Limite fundamentale de funcții.....	375
5.7. Funcții continue .....	378
5.7.1. Teoreme .....	378
5.7.2. Funcții continue pe intervale numerice .....	379
5.7.3. Prelungirea funcțiilor prin continuitate .....	380
5.7.4. Operații cu funcții continue.....	380
5.7.5. Continuitatea funcțiilor compuse.....	380
5.7.6. Teorema lui Cauchy.....	380
5.8. Funcții derivabile .....	381
Tabela 5.1. Derivatele și diferențialele funcțiilor elementare .....	384
5.8.1. Proprietăți ale funcțiilor derivabile.....	390
5.8.2. Consecințe ale teoremei lui Lagrange .....	391
5.8.3. Derivate de ordin superior.....	391
5.8.4. Forme nedeterminate. Înlăturarea nedeterminărilor....	392
5.8.5. Reprezentarea grafică a funcțiilor.....	394
5.9. Primitive. Proprietăți .....	396
5.9.1. Proprietăți .....	396
Tabela 5.2. Primitive imediate ale unor funcții elementare	396
5.9.2. Metode de calcul al primitivelor.....	400
Tabela 5.3. Alte primitive.....	401
5.9.3. Calculul primitivelor unor funcții raționale.....	406
5.9.4. Metoda lui Ostrogradschii pentru determinarea părții raționale a primitivei dintr-o funcție rațională.....	408
5.9.5. Substituții și formule utilizate pentru reducerea calculării primitivelor unor funcții la calcularea primitivelor din funcții raționale .....	410
5.10. Funcții integrabile .....	412
5.10.1. Integrala Riemann .....	412
5.10.2. Proprietăți ale integralei definite.....	413
Tabela 5.4. Citeva integrale definite.....	415
5.10.3. Aplicații ale integralei definite.....	416
5.10.4. Integrarea numerică a funcțiilor.....	417
5.11. Ecuații diferențiale .....	418
5.11.1. Citeva tipuri de ecuații diferențiale elementare.....	419
5.11.2. Mulțimea soluțiilor unor ecuații diferențiale și soluția problemei lui Cauchy pentru aceste ecuații.....	420
Tabela 5.5. Multiplii lui $\pi$ de la 1 la 100 .....	424
Tabela 5.6. Multiplii lui $1/\pi$ de la 1 la 100 .....	425
Tabela 5.7. Citeva integrale pe intervale necompacte ....	426
<i>Bibliografie</i> .....	426

7	8		
		9	